Lois de composition interne

Exercice 6

On considère dans $\mathbb{R}$ la loi interne T définie par :

$$\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\ xTy = x+y+\frac{1}{2}xy$$

1) déterminer l'élément neutre de $(\mathbb{R},T)$

2) montrer que $\mathbb{R}-\{-2\}$ est stable dans $(\mathbb{R},T)$

3) soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=1+\frac{1}{2}x$

Comparer $f(xTy)$ et $f(x)\times f(y)$

Exercice 7

Soit $J=]0,1[$. On considère dans J la loi $*$ telle que :

$$\left(\forall(x,y)\in J^2\right)\ x*y=\frac{xy}{xy+(x-1)(y-1)}$$

1) montrer que $*$ est interne dans J et commutative

2) montrer que $*$ est associative

3) montrer que $(J,*)$ est un groupe commutatif

4) soit f l'application définie de $\mathbb{R}^{*+}$ vers J par :

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}\right)\quad f(x)=\frac{x}{x+1}$$

a) montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^{*+},\times)$ vers $(J,*)$

b) déduire la structure de $(J,*)$

Exercice 8

On considère dans $\mathbb{R}^{*+}$ la loi $*$ telle que :

$$\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^{*+2}\right)\ x*y=e^{\ln x\,\ln y}$$

1) montrer que $*$ est interne dans $\mathbb{R}^{*+}$ et commutative

2) montrer que $*$ est associative

3) montrer que $*$ admet un élément neutre

4) montrer que $(\mathbb{R}^{*+}-\{1\},*)$ est un groupe commutatif

5) montrer que $I=]1,+\infty[$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^{*+}-\{1\},*)$

Exercice 9

On définie sur $\mathbb{R}^2$ la loi $*$ par :

$$\left(\forall(x',y')\in\mathbb{R}^2\right)\ (x,y)*(x',y')=(xx',yy')$$

1) Vérifier que $*$ est commutative , associative

2) Déterminer l'élément neutre de $(\mathbb{R}^2,*)$

3) Déterminer les éléments de $\mathbb{R}^2$ qui admettent un symétrique dans $(\mathbb{R}^2,*)$

4) a) Montrer que $E=\mathbb{R}\times\{0\}$ est stable dans $(\mathbb{R}^2,*)$

b) $*$ admet-elle un élément neutre dans E ?