

Limites et continuité

1 la continuité en un point.

Définition :

soient f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.
On dit f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Définition :

soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de type $[a, b]$.

★ On dit que f est continue à droite en a si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

★ On dit que f est continue à gauche en b si $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Proposition :

f est continue en $a \Leftrightarrow f$ est continue à droite et à gauche en a

Remarque :

la partie entière n'est pas continue en tout n de \mathbb{Z} .

2 la continuité sur un intervalle.

Définition :

★ on dit que f est une fonction continue sur un intervalle ouvert I s'elle est continue en tout point de I .

★ on dit que f est une fonction sur un intervalle $[a, b]$ s'elle est continue sur $]a, b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b .

Remarques :

★ la partie entière est continue sur l'intervalle $[n, n + 1[$ pour tout n de \mathbb{Z} .

★ si f est continue sur un intervalle I alors elle est continue sur tout intervalle $J \subset I$.

Proposition :

Les fonctions polynomiales, les fonctions rationnelles, les fonctions : $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur leur domaine de définition.

3 Les opérations sur les fonctions continues.

Proposition :

soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$.

★ les fonctions $f + g$, λf et $f \times g$ sont continues sur I .

★ si de plus g ne s'annule pas sur I , alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I .

Proposition :

★ si f et g sont deux fonctions continues sur I et J respectivement avec $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est continue sur I .

★ soient I un intervalle ouvert, $a \in I$, f une fonction définie sur I avec $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ et g est une fonction continue sur J avec $f(I) \subset J$ alors $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = g(l)$.

4 L'image d'un intervalle par une fonction continue

Proposition :

- ★ l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
- ★ l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

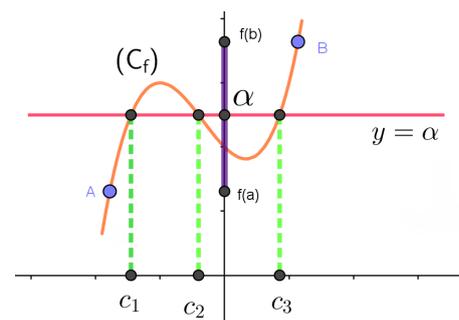
I	$f(I)$ si f est continue et str ↗	$f(I)$ si f est continue et str ↘
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$]a, b]$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), f(b)]$	$[f(b), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
$[a, b[$	$[f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a)]$
$]a, b[$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
$[a, +\infty[$	$[f(a), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(a)]$
$]a, +\infty[$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
$] -\infty, b]$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(b)]$	$[f(b), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$
$] -\infty, b[$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$
$] -\infty, +\infty[$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème :

soient f une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in I$.

Pour tout α compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un c compris entre a et b tel que $f(c) = \alpha$.
(autrement l'équation $f(x) = \alpha$ admet au moins une solution)



Corollaire :

soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$.

Pour tout α compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un unique $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \alpha$.
(autrement l'équation $f(x) = \alpha$ admet une unique solution sur $[a, b]$)

Corollaire :

soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f(a) \times f(b) < 0$. Alors :

- ★ l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in]a, b[$.
- ★ si de plus f est strictement monotone, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]a, b[$.

La méthode de dichotomie :

Le but de cette méthode est d'approcher la solution d'une équation de type $f(x) = 0$.

Si f est continue et strictement monotone sur $[a, b]$ telle que $f(a) \times f(b) < 0$, alors $\exists ! \alpha \in]a, b[/ f(\alpha) = 0$.

On a deux cas :

★ si $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \times f(b) < 0$ alors $\alpha \in \left] \frac{a+b}{2}, b \right[$.

★ si $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \times f(a) < 0$ alors $\alpha \in \left] a, \frac{a+b}{2} \right[$.

On continue de cette manière jusqu'à l'encadrement demandé de α .

5 La fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone.

Définition :

soient f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et $J = f(I)$.
La fonction qui lie chaque élément y de J avec l'unique élément x de I tel que $f(x) = y$ s'appelle la fonction réciproque de f notée f^{-1} .

Conséquences :

soient f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et f^{-1} sa réciproque. On a :

$$\star \begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in f(I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \quad \star (\forall x \in I) : (f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \star (\forall x \in f(I)) : (f \circ f^{-1})(x) = x$$

Proposition :

soient f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et f^{-1} sa réciproque. On a :

★ f^{-1} est continue sur $f(I)$.

★ f^{-1} est strictement monotone sur $f(I)$ avec f et f^{-1} ont la même monotonie.

★ $(C_{f^{-1}})$ est symétrique à (C_f) par rapport à la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé.

6 La fonction racine $n^{\text{ième}}$.

Proposition :

soit $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Alors elle admet une fonction réciproque sera noté $\sqrt[n]{}$.

Conséquences :

$$\star \begin{array}{ccc} \sqrt[n]{} : & [0, +\infty[& \rightarrow & [0, +\infty[\\ & x & \rightarrow & \sqrt[n]{x} \end{array}$$

$$\star (\forall x, y \in [0, +\infty]) : \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$$

$$\star (\forall x \in [0, +\infty]) : (\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$$

Définition :

Si $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$, on pose

$$(\forall x \in]0, +\infty[) : x^r = \sqrt[q]{x^p}$$

Propriétés :

★ La fonction $x \mapsto x^r$ est continue sur $]0, +\infty[$, pour tout $r \in \mathbb{Q}$.

★ pour tout $r, r' \in \mathbb{Q}$ et pour tout $x, y \in]0, +\infty[$ on a :

$$x^r > 0 \quad ; \quad x^{r+r'} = x^r \times x^{r'} \quad ; \quad x^{rr'} = (x^r)^{r'} \quad ; \quad \frac{1}{x^r} = x^{-r}$$

$$\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'} \quad ; \quad (xy)^r = x^r y^r \quad ; \quad \left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r} \quad ;$$

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x - y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}} \quad \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = \frac{x - y}{(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x^2} + \sqrt[4]{y^2})}$$

7 La fonction arctan.

Proposition :

La fonction $x \mapsto \tan(x)$ est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Alors elle admet une fonction réciproque sera noté **arctan**.

Propriétés :

★ La fonction $x \mapsto \arctan(x)$ est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} .

★ $(\forall x \in \mathbb{R}) : \tan(\arctan(x)) = x$

★ $\left(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) : \arctan(\tan(x)) = x$

★ $(\forall x \in \mathbb{R}); \left(\forall y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) : \arctan(x) = y \iff x = \tan(y)$

★ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$

★ la courbe (C_{\arctan}) :

