LIMITE ET CONTINUITE

I)LIMITE D'UNE FONCTION EN UN POINT COMPLEMENTS (limite à droite et à gauche et opérations sur les limites)

1)Rappelles ;

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}/a < x < b\}$

1)Le centre de l'intervalle] a, b [est le réel

$x_0 = \frac{a+b}{2}$

2)Le rayon de l'intervalle]a, b[est le réel positif

$r = \frac{b-a}{2}$

3)L'ensemble : ¨ $]a;b[^* = \{x \in \mathbb{R} / a \prec x \prec b\} - \{x_0\}$ où x_0 est le centre de l'intervalle]a, b[:

S'appelle l'intervalle Pointé de bornes a et b.

4)Si r est le rayon de l'intervalle]a, b[et x_0 son centre alors : $]a;b[^* =]x_0 - r; x_0 + r[- \{x_0\}$

$x \in]x_0 - r; x_0 + r[- \{x_0\} \Leftrightarrow \prec |x - x_0| \prec r$

$x \in]x_0 - r; x_0 + r[- \{x_0\} \Leftrightarrow \prec |x - x_0| \prec r$

Exercice1 : Soit la fonction : $f : x \mapsto 2x^2 + 3x + 1$

Montrer en utilisant la définition que : $\lim_{x\to 1} f(x) = 6$

Solution : Montrons que :

($\forall\varepsilon$ > 0)($\exists\alpha$ >0)($\forall x \in Df$)(0<|x-1|<$\alpha \Rightarrow$|$f(x)$-6 | < ε ?

Soit : $I = \left]1-\frac{1}{2};1+\frac{1}{2}\right[= \left]\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[$

$x \in \left]1-\frac{1}{2};1+\frac{1}{2}\right[$ donc

$|f(x)-6| = |2x^2+3x-5| = |x-1||2x+5|$

$x \in \left]\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[$ donc : $|x-1| \prec \frac{1}{2}$

$x \in \left]\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[$ donc : $\frac{1}{2} \prec x \prec \frac{3}{2}$ donc : $6 \prec 2x+5 \prec 8$

donc : $|2x+5| \prec 8$ donc : $|2x+5||x-1| \leq 8|x-1|$

Soit ε > 0 on cherche α >0 tel que :

0<|x-1|<$\alpha \Rightarrow$|$f(x)$-6 | < ε

Pour avoir $\Rightarrow$|$f(x)$-6 | < ε il suffit d'avoir $8|x-1| \prec \varepsilon$

et $|x-1| \prec \frac{1}{2}$ cad $|x-1| \prec \frac{\varepsilon}{8}$ et $|x-1| \prec \frac{1}{2}$

Il suffit de prendre α le plus petit des nombres : $\frac{\varepsilon}{8}$ et $\frac{1}{2}$ cad $\alpha = \inf\left(\frac{\varepsilon}{8};\frac{1}{2}\right)$

donc : $\lim_{x\to 1} f(x) = 6$

2)unicité de la limite

Propriété :si une fonction admet une limite en Un point alors cette limite est unique

Preuve : soit f une fonction qui admet une limite en x_0 (raisonnement par l'absurde)

On suppose que f admet deux limites : $l_1 \neq l_2$

En prend : $\varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{2} \succ 0$

On a donc :

($\exists\alpha_1$ >0)($\forall x \in Df$)(0<|x-1|< $\alpha_1 \Rightarrow$|$f(x)$- l_1 | < ε

Et ($\exists\alpha_2$ >0)($\forall x \in Df$)(0<|x-1|< $\alpha_2 \Rightarrow$|$f(x)$- l_2 | < ε

Soit : $\alpha = \inf(\alpha_1;\alpha_2)$ donc :

0<|x-1|< $\alpha \Rightarrow$|$f(x)$- l_2 | < ε et |$f(x)$- l_1 | < ε

$|l_1 - l_2| = |l_1 - f(x) + f(x) - l_2| \leq |l_1 - f(x)| + |f(x) - l_2|$

$|l_1 - l_2| \leq |f(x) - l_1| + |f(x) - l_2| \prec \frac{|l_1 - l_2|}{2} + \frac{|l_1 - l_2|}{2}$

$|l_1 - l_2| \prec |l_1 - l_2|$ Absurde

Donc : $l_1 = l_2$

3) limites et opérations

Soient P et Q deux fonction polynôme et $x_0 \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^*$ alors :

1) $\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$

2) $\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ si $Q(x_0) \neq 0$

3) $\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$ 4) $\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$

5) $\lim_{x\to x_0} \tan x = \tan x_0$ si $x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

5) $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$ si $x_0\geq 0$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{ax}=1$ 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax}{ax}=1$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

Limite de la somme

$\lim f$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f+g$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme ind

Ces propriétés sont vraies si x tend vers $a+$; $a-$; $+\infty$ ou $-\infty$

Limites des produits

$\lim f$	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f\times g$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme ind	Forme ind	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Limites des inverses

$\lim f$	$\ell\neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\dfrac{1}{f}$	$\dfrac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

Limites des quotients

$\lim f$	ℓ	ℓ	$\ell\neq 0$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim g$	$\ell'\neq 0$	$\pm\infty$	0	ℓ	0	$\pm\infty$
$\lim\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	?	?

Limites à droite et à gauche

Exemple: Soit la fonction $f:x\mapsto\dfrac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$

Etudier la limite de f en $x_0=-1$

Solution :

Déterminons $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\succ -1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\prec -1}} f(x)$?

Solution : $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

Si : $-1\prec x\prec 1$: $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|}=-\dfrac{x+1}{x-1}$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\succ -1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\succ -1}}-\dfrac{x+1}{x-1}=0$

Si : $x\prec -1$: $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|}=\dfrac{x+1}{x-1}$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\prec -1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\prec -1}}\dfrac{x+1}{x-1}=0$

donc : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\succ -1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\prec -1}} f(x)=0$ donc : $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=0$

4)Exercices : RAPPELLES

Exercice2: Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+1}{2x-1}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}2x^3+x^2-x+4$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3}$ 4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x$ 6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$

Solutions :1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+1}{2x-1}=\dfrac{3}{1}=3$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}2x^3+x^2-x+4=\lim\limits_{x\to+\infty}2x^3=+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-7x^4}{14x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{2}=-\infty$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^5}{2x^6}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{1}{x}=0$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x$?

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2+x=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}=+\infty$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty}-x=-\infty$

on trouve une formes indéterminée : "$+\infty-\infty$"

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}$$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}$ or $x\to+\infty$ donc $|x|=x$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+1}=\frac{1}{2}$$

6) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$ On pose $x-\frac{\pi}{4}=h$

donc $x\to\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow h\to 0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{h\to 0}\frac{\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)}{h}$$

or : $\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan h+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan h\times\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\tan h+1}{1-\tan h}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{h\to 0}\frac{2}{1-\tan h}\times\frac{\tan h}{h}=\frac{2}{1}\times 1=2$$

Exercice3 : Soient les fonctions tels que :

$f(x)=\sqrt{2x+1}\left(-3x^2+x\right)$ et $g(x)=\frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

$k(x)=\frac{-3x+1}{x(x-2)}$ et $h(x)=\frac{x^2+1}{x^3}\sin x$

1)Déterminer : $\lim_{x\to 2}f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

2)Déterminer : $\lim_{x\to+\infty}g(x)$ et $\lim_{x\to 3}g(x)$

3)Déterminer : $\lim_{x\to 0}h(x)$

4)Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de k

Solution :

1)Déterminer : $\lim_{x\to 2}f(x)$ et $f(x)=\sqrt{2x+1}\left(-3x^2+x\right)$

$\lim_{x\to 2}2x+1=5$ et $\lim_{x\to 2}-3x^2+x=-10$

Donc : $\lim_{x\to 2}f(x)=\sqrt{5}\times(-10)=-10\sqrt{5}$

$\lim_{x\to+\infty}2x+1=\lim_{x\to+\infty}2x=+\infty$

Donc : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x+1}=+\infty$

Et on a : $\lim_{x\to+\infty}-3x^2+x=\lim_{x\to+\infty}-3x^2=-\infty$

Donc : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

- 2) $\lim_{x\to+\infty}g(x)$? et $g(x)=\frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

On a : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ donc : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}+1=+\infty$

Et $\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2}{x^2}=-2$ donc : $\lim_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$

- 2) $\lim_{x\to 3}g(x)$? et $g(x)=\frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

$\lim_{x\to 3}\sqrt{x}+1=\sqrt{3}+1$ et $\lim_{x\to 3}-2x^2+1=-17$ et

$\lim_{x\to 3}(x-3)^2=0^+$ donc : $\lim_{x\to 3}g(x)=-\infty$

3) $\lim_{x\to 0}h(x)$?.

$\lim_{x\to 0}h(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x^2}\frac{\sin x}{x}$

Or $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ et puisque : $\lim_{x\to 0}x^2+1=1$ et $\lim_{x\to 0}x^2=0^+$

et $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x^2}=+\infty$ alors : $\lim_{x\to 0}h(x)=+\infty$

4) $k(x)=\frac{-3x+1}{x(x-2)}$ donc : $D_k=]-\infty;0[\cup]0;2[\cup]2;+\infty[$

- $\lim_{x\to+\infty}k(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x+1}{x^2-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3}{x}=0$
- $\lim_{x\to-\infty}k(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x+1}{x^2-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3}{x}=0$
- $\lim_{x\to 0}-3x+1=1$ et $\lim_{x\to 0}x^2-2x=0$

Etude du signe de : x^2-2x

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $\lim_{x\to 0^+}x^2-2x=0^-$ et $\lim_{x\to 0^-}x^2-2x=0^+$

Donc : $\lim_{x\to 0^+}k(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to 0^-}k(x)=+\infty$

$\lim_{x\to 2}-3x+1=-5$ et $\lim_{x\to 2^+}x^2-2x=0^+$ et $\lim_{x\to 2^-}x^2-2x=0^-$

Donc : $\lim_{x\to 2^+}k(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to 2^-}k(x)=+\infty$

II) CONTINUITE D'UNE FONCTION NUMERIQUE EN UN POINT :

1)Activité : Considérons la fonction f définie

par : $\begin{cases} f(x)=\frac{x^2-6x+5}{x-1};si...x\neq 1\\ f(1)=-4\end{cases}$

1) Déterminer Df

2) a) $\lim_{x\to1} f(x)$

b) Comparer $\lim_{x\to1} f(x)$ et $f(1)$

Solution :1) $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

2)a)

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{x^2-6x+5}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x-5)}{x-1} = \lim_{x\to1} x-5 = -4$$

2) b) $\lim_{x\to1} f(x) = f(1)$

On dit que f est continue en $x_0 = 1$

2) Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle de centre a. On dit que la fonction f est continue en a si elle admet une limite finie en a et $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$:C'est-à-dire :

$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 \le |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Exemple1 : Considérons la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sin(x-2)}{x^2-2x}\ ;\ si\ x \neq 0 \text{ et } x \neq 2 \text{ et } f(2) = 1/2$$

Etudier la est continuité de f en $x_0 = 2$

Solution : $\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} \frac{1}{x}\frac{\sin(x-2)}{x-2} = \frac{1}{2} = f(2)$ Alors : $\lim_{x\to2} f(x) = f(2)$ Donc : f est continue en $x_0 = 2$

Exemple2 : Considérons la fonction f définie par

$$f(x) = 2 + x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right);\ si\ x \neq 0 \text{ et } f(0) = 2$$

Etudier la est continuité de f en $x_0 = 0$

Solution : $x \in \mathbb{R}^*$ $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le 1$ donc :

$\left|f(x) - 2\right| = x^2\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le x^2$ et on a $\lim_{x\to0} x^2 = 0$

Alors : $\lim_{x\to0} f(x) = 2 = f(0)$

Donc : f est continue en $x_0 = 0$

Exercice4 : Considérons la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^2+x-12}{x-3}\ ;\ si\ x \neq 3 \text{ et } f(3) = 7$$

Etudier la est continuité de f en $x_0 = 3$

Solution : on a : $f(x) = \frac{x^2+x-12}{x-3} = x+4$ D.EC

$\lim_{x\to3} f(x) = \lim_{x\to3} x+4 = 7 = f(3)$

Alors : $\lim_{x\to3} f(x) = f(3)$

Donc : f est continue en $x_0 = 3$

Exercice5 : Considérons la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x}\ ;\ si\ x \neq 0 \text{ et } f(0) = 1/2$$

Etudier la est continuité de f en $x_0 = 0$

Solution :

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x} = \lim_{x\to0} \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}+1)\tan x}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{x}{\tan x} \times \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = 1 \times \frac{1}{2} = f(0)$$

Alors : $\lim_{x\to0} f(x) = f(0)$

Donc : f est continue en $x_0 = 0$

Exercice6 : Considérons la fonction f définie

Par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x-1}; si ... x \neq 1 \\ f(1) = m \end{cases}$

avec m paramètre réel

déterminer la valeur du réel m pour laquelle f est continue en $x_0 = 1$

Solution : $\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$

on pose : $h = x-1$ $\quad x \to 1 \Leftrightarrow h \to 0$

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{h\to0} \frac{\sin(\pi(h+1))}{h} = \lim_{h\to0} \frac{\sin(\pi h+\pi)}{h}$$

$$= \lim_{h\to0} \frac{-\sin(\pi h)}{\pi h}\pi = -\pi$$

donc f est continue en $x_0 = 1$ ssi $m = -\pi$

Exercice7 : Considérons la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x}{2}E\left(\frac{3}{x}\right);\ si\ x \neq 0 \text{ et } f(0) = \frac{1}{2}$$

(E désigne la partie entière)

1)Montrer que $\left|f(x) - \frac{3}{2}\right| \le \frac{|x|}{2}$

2) f est-elle continue en $x_0 = 0$?

Solution :

1) on a : $x-1 \prec E(x) \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{3}{x}-1 \prec E\left(\frac{3}{x}\right) \leq \frac{3}{x}$

SI $x \succ 0$: $\frac{x}{2}\left(\frac{3}{x}-1\right) \prec \frac{x}{2}E\left(\frac{3}{x}\right) \leq \frac{x}{2} \times \frac{3}{x}$

Cad : $\frac{3}{2}-\frac{x}{2} \prec f(x) \leq \frac{3}{2}$

donc : $-\frac{x}{2} \prec f(x)-\frac{3}{2} \leq 0$

donc : $\left|f(x)-\frac{3}{2}\right| \leq \frac{|x|}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

SI $x \prec 0$: $\frac{x}{2} \times \frac{3}{x} \leq \frac{x}{2}E\left(\frac{3}{x}\right) \prec \frac{x}{2}\left(\frac{3}{x}-1\right)$

Cad : $\frac{3}{2} \leq f(x) \prec \frac{3}{2}-\frac{x}{2}$

donc : $0 \leq f(x)-\frac{3}{2} \prec -\frac{x}{2}$

donc : $\left|f(x)-\frac{3}{2}\right| \leq \frac{|x|}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}_-^*$

finalement : $\left|f(x)-\frac{3}{2}\right| \leq \frac{|x|}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$

2) on a $\left|f(x)-\frac{3}{2}\right| \leq \frac{|x|}{2}$ et on a $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{2} = 0$

Donc : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{3}{2} \neq f(0)$

Donc : f est discontinue en $x_0 = 0$

3) continuité à droite et à gauche

Exemple : Soit f définie sur **R** par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 ; si...x \leq 0 \\ f(1) = 2 + x ; si...x \succ 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0 = f(0)$

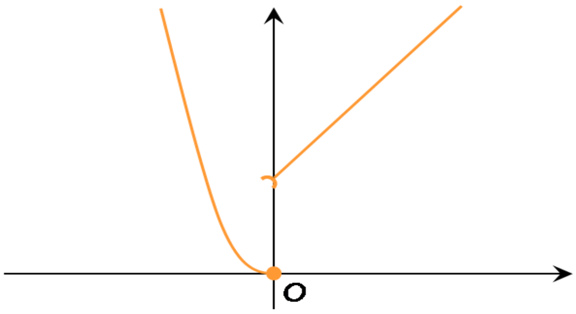
On dit que f est continue à gauche de $x_0 = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 2 + x = 2 \neq f(0)$

On dit que f n'est pas continue à droite de 0

Et on a : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

Donc, la limite en 0 n'existe pas.
Conséquence : f ne peut être continue en 2



Graphiquement : La courbe de f ne peut être tracée sur un intervalle comprenant 0, « sans lever le crayon ».

Définition :1) Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a + r[$ où $r > 0$
On dit que la fonction f est continue à droite de a si elle admet une limite finie à droite en a et $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$:

2) Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a-r; a]$ où $r > 0$

On dit que la fonction f est continue à gauche de a si elle admet une limite finie à gauche en a et $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

Exemple : Soit f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 3 - x^2 ; si...x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{x^2-3}{2x-1} ; si...x \succ 0 \end{cases}$$

Etudier la est continuité de f à droite et à gauche de $x_0 = 0$

Solution : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x^2-3}{2x-1} = 3 = f(0)$

donc f est continue à droite de $x_0 = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 3 - x^2 = 3 = f(0)$

donc f est continue à gauche de $x_0 = 0$

Théorème : Une fonction est continue en un point a si et seulement si elle est continue à droite et à gauche de a

Donc : f est continue en $x_0 = 0$ ssi

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

Exemple1 : Considérons la fonction f définie

Par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x+1}{7-3x} ; si...x \leq 2 \\ f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x-2} ; si...x \succ 2 \end{cases}$

Etudier la est continuité de f en $x_0=2$

Solution : on a : $f(2)=\frac{2\times2+1}{7-3\times2}=\frac{5}{7-3\times2}=5$

$\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}$

$\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+} x+3=5=f(2)$

Donc f est continue adroite de f en $x_0=2$

$\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-}\frac{2x+1}{7-3x}=\frac{5}{1}=5=f(2)$

Donc f est continue gauche en $x_0=2$

Donc f est continue en $x_0=2$

Exemple2: Soit la fonction $f:x\mapsto\frac{x^2-1}{|x-1|}$ si $x\neq1$

Et : $f(1)=2$

Etudier la la continuité de f en $x_0=1$

Solution : $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$

$\lim_{\substack{x\to1\\x\succ1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\x\succ1}}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\x\succ1}} x+1=2=f(1)$

donc f est continue à droite de $x_0=1$

$\lim_{\substack{x\to1\\x\prec1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\x\prec1}}-\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\x\succ1}}-(x+1)=-2\neq f(1)$

donc f n'est pas continue à gauche de $x_0=1$

donc f n'est pas continue en $x_0=1$

On 2dit que f est discontinue en $x_0=1$

4) Prolongement par continuité

Activité : Soit la fonction h définie par

$f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+3x+2}$

1- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2- Déterminer la limite $\lim_{x\to-1} f(x)$, f est-elle continue en $x_0=-1$?

3- Soit la fonction f définie par :

$\begin{cases} f(x)=f(x);si...x\neq-1\\ f(-1)=3\end{cases}$

a) Déterminer D_f

b) Etudier la continuité de la fonction f en $x_0=-1$ La fonction f s'appelle un prolongement par continuité de la fonction de f en -1

4- Peut-on prolonger f par continuité en $a=-2$

Solution : 1)

$x\in D_f\Leftrightarrow x^2+3x+2\neq0\Leftrightarrow x\neq-1$ et $x\neq-2$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{-1;-2\}$

2) $\lim_{x\to-1} f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x+2)}$

$\lim_{x\to-1} f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x+1}{x+2}=3$

$-1\notin D_f$ donc f n'est pas continue en $x_0=-1$

3) a) $\begin{cases} f(x)=f(x);si...x\neq-1\\ f(-1)=3\end{cases}$ donc : $D_f=\mathbb{R}-\{-2\}$

b) $\lim_{x\to-1} f(x)=3=f(-1)$

donc f est continue en $x_0=-1$

4) $\lim_{x\to-2} f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x^2+3x+2}$?

$\lim_{x\to-2^+} x^3+1=-7$

$\lim_{x\to-2^+} x^2+3x+2=0^-$ donc : $\lim_{x\to-2^+} f(x)=+\infty$

Donc on ne peut pas prolonger f par continuité en $a=-2$

Théorème et définition : Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est D_f ; a un réel tel que $a\notin D_f$ et $\lim_{x\to a} f(x)=l$ (finie)

La fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=f(x);si...x\neq a\\ f(a)=l\end{cases}$

Est une fonction continue en $\boldsymbol{a}$ et s'appelle un prolongement par continuité de la fonction f en a

Exemple : Soit f une fonction définie par

$f(x)=\frac{1-\cos x}{x}$ Donner un prolongement par continuité de la fonction f en $x_0=0$

Solution : $\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}\times x=0$

Car : $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

Donc La fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = f(x); si...x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Est une prolongement par continuité de la fonction f en $x_0 = 0$

Exercice 8 : Soit la fonction h définie par $h(x) = \frac{x^2+x-6}{x-E(x)}$ (E désigne la partie entière)

Peut-on prolonger h par continuité en $a = 2$?

III) OPERATIONS SUR LES FONCTIONS CONTINUES.

1) Continuité sur un intervalle

Définition :

Soit f une fonction dont le domaine de définition est D_f, soit $]a, b[$ un intervalle inclus dans Df

1) On dit que f est continue sur l'ouvert$]a, b[$ si elle est continue en tout point de $]a, b[$

2) On dit que f est continue sur $[a, b[$ si elle est continue sur $]a, b[$ et à droite de a

3) On dit que f est continue sur $[a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$, à droite de a et à gauche de b

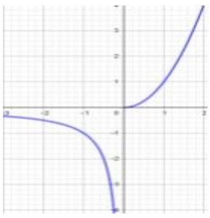
Remarque :

1) Si une fonction f est continue sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$ elle est continue sur $[a, c]$

2) En général si f est continue sur un intervalle I et sur un intervalle J et si $I \cap J \neq \emptyset$ alors f est continue sur $I \cup J$.

3) f peut-être continue sur $[a, b[$ et sur $[b, c]$ sans qu'elle soit continue sur $[a, c]$

Dans le graphique ci-dessous f est continue sur $[-3,0[$ et $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x}; si...x \prec 0 \\ f(x) = x^2; si...x \geq 0 \end{cases}$



continue sur $[0, 2]$ mais pas continue sur $[-3,0]$ car elle n'est pas continue en 0

2) Opérations sur les fonctions continues

Propriétés : 1)Si f et g sont deux fonctions continues en a alors :

a) $f + g$ b) $f \times g$ c) $|f|$

Sont des fonctions continues en a

2)Si f et g sont deux fonctions continues en a et $g(a) \neq 0$ alors

a) $\frac{1}{g}$ b) $\frac{f}{g}$ sont des fonctions continues en a.

3) Si f une fonction continue en a et $f(a) \geq 0$ alors : $\sqrt{f}$ est continue en a

Remarque : La propriété précédente reste vraie soit à droite de a, à gauche de a ou sur un intervalle I (En tenant compte des conditions)

Propriétés : 1) Tout fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$

2) Les fonctions sin et cos sont continue sur $\mathbb{R}$

Exemples :

1) $h(x) = \sqrt{x^2+x+3}$

x^2+x+3 Est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ de plus $(\forall x \in \mathbb{R})(\ x^2+x+3 \geq 0)$

(Son discriminant Δ est négatif)

2) $g(x) = \frac{x^4+x^3-6}{x^2+2x-3}$ est continue sur :

$]-\infty,-3[$; sur $]-3,1[$ et sur $]1,+\infty[$.

3) La fonction tan est continue sur tous le intervalles de la forme : $]-\pi/2+k\pi\,;\pi/2+k\pi[$ (où $k \in \mathbb{Z}$)

3) Continuité de la composition de deux fonctions.

Théorème : Soient f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J tels que $f(I) \subset J$

et x_0 un élément de I.

1) Si f est continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$ alors gof est continue en x_0.

2) Si f est continue I et g continue en $f(I)$ alors gof est continue I.

Preuve : (En utilisant la définition)

Montrons que : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists\ \alpha > 0)(|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |(gof)(x) - (gof)(\ x_0)| < \varepsilon$

On a g est continue en $f(x_0)$ donc :

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\ \beta > 0)(|t - f(x_0)| < \beta \Rightarrow |g(t) - g(f(x_0))| < \varepsilon$ (R)

et puisque $f(I) \subset J$ donc : $(\forall x \in I)(f(x) \in J)$
(On pose $t = f(x)$ dans (R)) on obtient :
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\ \beta > 0)(|f(x) - f(x_0)| < \beta \Rightarrow$
$|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$ (*)
Pour $\beta > 0$ $(\exists \alpha > 0)$ $(|x - x_0| < \alpha \Rightarrow$
$|f(x) - f(x_0)| < \beta$(car f est continue en x_0)
$\Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$ (*) C.Q.F.D

Exemples :1) Soit f une fonction définie par
$f(x)=\cos(2x^2-3x+4)$
Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}$
Puisque les fonctions : $f_1 : x \to 2x^2-3x+4$ et
$f_2 : x \to \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$
Et $f_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ alors : $f = f_2 \circ f_1$ est continue sur $\mathbb{R}$

2) Soit g une fonction définie par
$g(x)=\sqrt{\dfrac{x}{1+\sin^2 x}}$
Montrons que g est continue sur $\mathbb{R}^+$
On a : $D_g = [0;+\infty[$ et Puisque la fonction :
$g_1 : x \to \dfrac{x}{1+\sin^2 x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et
$g_1(\mathbb{R}^+)=\mathbb{R}^+$ et $g_2 : x \to \sqrt{x}$ sont continue sur $\mathbb{R}^+$
Donc : $g = g_2 \circ g_1$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

3) Soit f et g deux fonctions définies par
$\begin{cases} f(x)=x+1; si...x \prec 0 \\ f(x)=0; si...x \geq 0 \end{cases}$ et $g(x)=5$
Montrons que f est n'est pas continue en $x_0 = 0$
et $h = g \circ f$ est continue en $x_0 = 0$
En effet :on a $f(0)=0$
et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x+1 = 1 \neq f(0)$
Et g est continue en $x_0 = 0$
mais on a : $(g \circ f)(x) = 5$ est continue en $x_0 = 0$

4) $f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car
$x \to x^2+1$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas
sur $\mathbb{R}$ donc : $x \to \dfrac{1}{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$
et $(\forall x \in \mathbb{R})$ ($\dfrac{1}{x^2+1} \in \mathbb{R}$) et sin est continue sur $\mathbb{R}$

3) Limite de $v o u$

Théorème **:**Soit u une fonction définie sur un intervalle pointé de centre x_0 telle $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = l$
si v est continue en l alors $\lim\limits_{x\to x_0} (v \circ u)(x) = v(l)$

Preuve :On a : $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = l \in \mathbb{R}$ donc u admet un prolongement par continuité u définie
comme : $\begin{cases} u(x)=u(x); si...x \neq x_0 \\ u(x_0)=l \end{cases}$
La fonction u étant continue en x_0 ; et v est continue en $u(x_0)=l$ alors et d'après le théorème de la composition $v \circ u$ est continue en x_0 et par suite :
$\lim\limits_{x\to x_0} (v \circ u)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} (v \circ u)(x) = (v \circ u)(x_0) = v(l)$

Exemples : Déterminer les limites suivantes :
1) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\pi\right)$
2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \cos\left(\pi\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)$

Solution :1)
Soient : $f : x \to \dfrac{1-\cos x}{x^2}\pi$ et $g : x \to \sin x$
Puisque : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}\pi = \dfrac{\pi}{2}$ g est continue sur $\mathbb{R}$
Donc continue en $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ donc :
$\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\pi\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$
2) puisque : $\lim\limits_{x\to +\infty} \pi\sqrt{\dfrac{1-1/x}{1-1/x}} = \pi$
Et la fonction : $x \to \cos x$ continue en π
donc : $\lim\limits_{x\to +\infty} \cos\left(\pi\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right) = \cos\pi = -1$

Exercice9 : Déterminer les limites suivantes :
1) $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\dfrac{\pi \tan x}{3x}\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sin\left(\dfrac{\pi x^2-4x+3}{4x^2+7}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\sin\sqrt{\dfrac{2x^2}{1-\cos x}}$

Solution :1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi\tan x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi}{3}\dfrac{\tan x}{x}=\dfrac{\pi}{3}$

et Puisque : $x\to\cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$

Donc continue en $x_0=\dfrac{\pi}{3}$ donc :

$$\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{\pi\tan x}{3x}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi x^2-4x+3}{4x^2+7}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi x^2}{4x^2}=\dfrac{\pi}{4}$

et Puisque : $x\to\sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$

Donc continue en $x_0=\dfrac{\pi}{4}$ donc :

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\left(\dfrac{\pi x^2-4x+3}{4x^2+7}\right)=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3) on a : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{0}$ donc : $\lim\limits_{x\to 0}2\dfrac{x^2}{1-\cos x}=4$

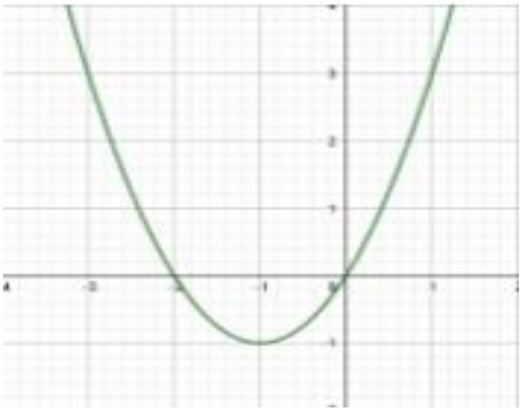
donc : $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{2x^2}{1-\cos x}}=2$: $x\to\sqrt{x}$ est continue en 4

donc : $\lim\limits_{x\to 0}\sin\sqrt{\dfrac{2x^2}{1-\cos x}}=\sin 2$ car : $x\to\sin x$ est continue en 2

IV) IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION CONTINUE

1) Image d'un segment (intervalle fermé) :

Activité : Le graphe ci-contre est le graphe de la fonction $f(x)=x^2+2x$



1- Déterminer graphiquement les images des intervalles : I_1 = [0,1] , I_2 = [−3,−1] ; I_3 = [−3,1]

2- Montrer algébriquement que $f([-3,1]) = [-1,3]$

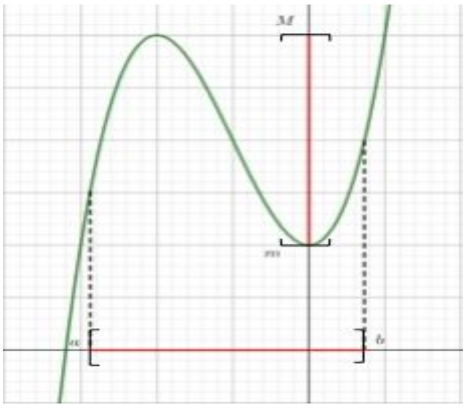
<u>Rappelle</u> : $f(I) = J \Leftrightarrow f(I) \subset J$ et $J \subset f(I)$

$\Leftrightarrow (\forall x \in I)(f(x) \in J)$ et $(\forall y \in J)(\exists x \in I)(f(x) = y$

Théorème : (Admis)

L'image d'un segment $[a, b]$ par une fonction continue est le segment $[m, M]$ où :

$m=\min\limits_{x\in[a;b]}f(x)$ et $M=\max\limits_{x\in[a;b]}f(x)$



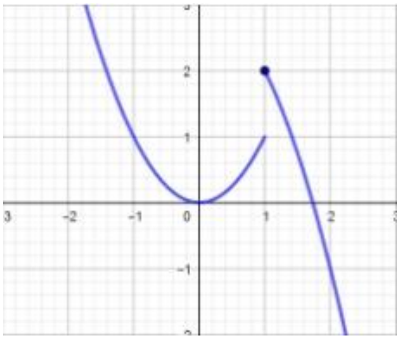
Cas particulier :

1) Si f est continue croissante sur $[a, b]$ alors $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$

2) Si f est continue décroissante sur $[a, b]$ alors $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$

Remarque : La continuité dans le théorème précèdent est suffisante mais pas nécessaire

Dans la figure ci-contre f n'est pas continue



Mais $f([0,2]) = [f(2), f(1)] = [-1,2]$

2) Image d'un intervalle.

2.1 Théorème général

Théorème (admis) : L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Exemples : $f(x)=x^2+2x$

Graphiquement en a : (le graphe ci-contre)

$f([-1,2])=[-1,3]$ et $f([0,2[)=[-1,0]$

$f(]-1,0])=[0,3[$ et $f([2,+\infty[)=[0,+\infty[$

$f(]-\infty,1])=[-1,+\infty[$

Remarque : L'intervalle I et son image $f(I)$ par une fonction continue n'ont pas nécessairement la même forme.

2.2 Cas d'une fonction strictement monotone

1) $\boldsymbol{f}$ continue et strictement croissante sur L'intervalle $\boldsymbol{I}$ et $a \in I$ et $b \in I$

$$f([a;b]) = [f(a); f(b)] \text{ et } f([a;b[) = \left[f(a); \lim_{\substack{x \to b \\ x \prec b}} f(x)\right[$$

$$f(]a;b]) = \left]\lim_{\substack{x \to a \\ x \succ a}} f(x); f(b)\right] \text{ et } f(]a;b[) = \left]\lim_{\substack{x \to a \\ x \succ a}} f(x); \lim_{\substack{x \to b \\ x \prec b}} f(x)\right[$$

2) $\boldsymbol{f}$ continue et strictement décroissante sur L'intervalle $\boldsymbol{I}$ et $a \in I$ et $b \in I$

$$f([a;b]) = [f(b); f(a)] \text{ et } f([a;b[) = \left]\lim_{\substack{x \to b \\ x \prec b}} f(x); f(a)\right]$$

$$f(]a;b]) = \left[f(b); \lim_{\substack{x \to a \\ x \succ a}} f(x)\right[\text{ et } f(]a;b[) = \left]\lim_{\substack{x \to b \\ x \prec b}} f(x); \lim_{\substack{x \to a \\ x \succ a}} f(x)\right[$$

Remarque : Si f n'est pas strictement monotone sur l'intervalle I, on peut utiliser les propriétés précédentes en subdivisant
L'intervalle I en intervalles où f est strictement monotone et on utilise la propriété :

$$f(I_1 \cup I_2) = f(I_1) \cup f(I_2)$$

Exemple : Soit f une fonction définie par

$$f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$$

Déterminer les images des intervalles suivants : $[0,1]$; $[-2,-1[$; $]-1, 1]$; $[2, +\infty[$

Solution : $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \succ 0$ donc : $\boldsymbol{f}$ continue et strictement croissante sur les intervalles $]-\infty; -1[$ et $]-1; +\infty[$ donc on a : $f([0;1]) = [f(0); f(1)] = \left[-3; \frac{-1}{2}\right]$

$$f([-2;-1[) = \left[f(-2); \lim_{\substack{x \to -1 \\ x \prec -1}} f(x)\right[= [7; +\infty[$$

$$f(]-1;1]) = \left]\lim_{\substack{x \to -1 \\ x \succ -1}} f(x); f(1)\right] = \left]-\infty; \frac{-1}{2}\right]$$

$$f([2;+\infty[) = \left[f(2); \lim_{x \to +\infty} f(x)\right[= \left[\frac{1}{3}; 2\right[$$

V) THEOREME DES VALEURS INTERMEDIERE – TVI.

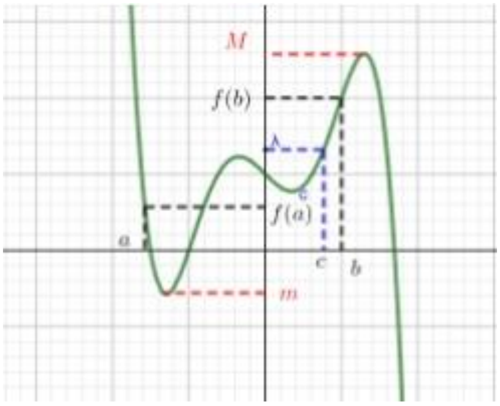
1)Cas général

Théorème T.V.I : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ .Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$

Preuve :

Rappelons que : $f(I) = J \Leftrightarrow (\forall x \in I)(f(x) \in J)$ et $(\forall y \in J)(\exists x \in I)(f(x) = y)$

Soit f une fonction continue sur un intervalle I



a et b deux éléments de I tels que : $a < b$.

On sait que $f([a, b]) = [m, M]$

où $m = \min_{x \in [a;b]} f(x)$ et $M = \max_{x \in [a;b]} f(x)$

On a donc $f(a) \in [m, M]$ et $f(b) \in [m, M]$.

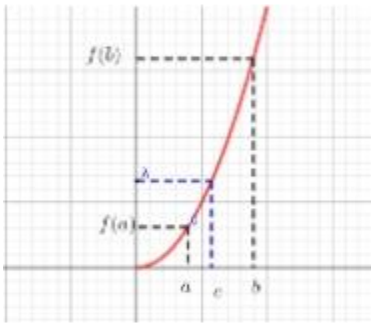
Soit λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ on a donc : $\lambda \in [m, M]$ et puisque $f([a, b]) = [m, M]$ donc λ admet au moins un antécédent c dans l'intervalle $[a, b]$.

D'où pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$

2) Cas f strictement monotone.

Théorème T.V.I (cas $\boldsymbol{f}$ strictement monotone) Soit f une fonction continue strictement monotone sur $[a, b]$.

Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un et un seul $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$



Remarque : L'expression " Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un et un seul $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$ "peut-être formulée comme :
" Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = \lambda$ admet une solution unique dans $[a, b]$

3) Corolaires

Corolaire1 (T.V.I) : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ .Si $f(a) \times f(b) < 0$ il existe au moins un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$

Preuve : $f(a) \times f(b) < 0$ veut dire que :
$f(a)$ et $f(b)$ ont des signes opposés donc 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ On prend $\lambda = 0$ dans le théorème général des valeurs intermédiaire.

Corolaire2 (T.V.I) :
Soit f une fonction continue strictement monotone sur $[a, b]$ .Si $f(a) \times f(b) < 0$ il existe un et un seul c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = 0$

4) Applications :

Exemple1 : Montrer que l'équation :
$4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$ admet une racine dans chacune des intervalles suivants : $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$; $\left]-\frac{1}{2};0\right[$ et $]0;1[$

Solution : on considère la fonction : g tel que
$g(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$

- On a : g est est continue sur sur $\mathbb{R}$ (car c'est une fonction polynôme) donc continue sur tout intervalle de $\mathbb{R}$
  - Et on a : $g(-1) = -\frac{3}{2}$ et $g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ donc :
    $g\left(-\frac{1}{2}\right) \times g(-1) \prec 0$ donc :d'après le **(T.V.I)**

il existe $\alpha_1 \in \left]-1;-\frac{1}{2}\right[$ tel que : $g(\alpha_1) = 0$

  - Et on a : $g(0) = -\frac{1}{2}$ et $g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ donc :
    $g\left(-\frac{1}{2}\right) \times g(0) \prec 0$ donc :d'après le **(T.V.I)**

il existe $\alpha_2 \in \left]-\frac{1}{2};0\right[$ tel que : $g(\alpha_2) = 0$

  - Et on a : $g(0) = -\frac{1}{2}$ et $g(1) = \frac{1}{2}$ donc :
    $g(1) \times g(0) \prec 0$ donc :d'après le **(T.V.I)**

il existe $\alpha_3 \in]0;1[$ tel que : $g(\alpha_3) = 0$

donc l'équation : $4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$ admet 3 racines différentes dans chacune des intervalles:
$\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$; $\left]-\frac{1}{2};0\right[$ et $]0;1[$

Exemple2 : Montrer que l'équation : $x^3 + x + 1 = 0$
Admet une racine unique dans $]-1;0[$

Solution : on considère la fonction : f tel que
$f(x) = x^3 + x + 1$

- On a : f est est continue sur sur $\mathbb{R}$ (car c'est une fonction polynôme) donc continue sur $]-1;0[$
- on a : $f(-1) = -1$ et $f(0) = 1$ donc :
  $f(1) \times f(-1) \prec 0$
- $f'(x) = 3x^2 + 1 \succ 0$ sur $]-1;0[$ donc f strictement croissante sur $]-1;0[$

Donc : d'après le **(T.V.I)** l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $]-1;0[$

Exercice10 : Montrer que l'équation : $\cos x = x$
Admet au moins une racine dans intervalle :
$I = [0;\pi]$

Solution : $\cos x = x \Leftrightarrow \cos x - x = 0$
On pose : $f(x) = \cos x - x$

- On a : f est est continue sur sur $\mathbb{R}$ (car c'est la différence de deux fonctions continues) donc continue sur $I = [0;\pi]$
- on a : $f(\pi) = -1 - \pi < 0$ et $f(0) = 1$ donc :
  $f(0) \times f(\pi) < 0$

Donc : d'après le **(T.V.I)**
il existe $\alpha \in]0;\pi[$ tel que : $f(\alpha) = 0$

Exercice11 : Montrer que l'équation : $1 + \sin x = x$
Admet au moins une racine dans intervalle :
$I = \left[\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right]$

Solution : $1 + \sin x = x \Leftrightarrow 1 + \sin x - x = 0$
On pose : $f(x) = 1 + \sin x - x$

- On a : f est est continue sur sur $\mathbb{R}$ (car c'est la différence de deux fonctions continues) donc continue sur $I=\left[\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right]$
- on a : $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4-\pi}{2}\succ 0$ et

$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{6+3\sqrt{3}-4\pi}{6}\prec 0$ donc : $f\left(\frac{\pi}{2}\right)\times f\left(\frac{2\pi}{3}\right)<0$

Donc : d'après le **(T.V.I)**

il existe $\alpha\in\left]\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right[$ tel que : $f(\alpha)=0$

Exercice12 : on considère la fonction : f tel que $f(x)=x^3+x-1$

1) Montrer que l'équation : $f(x)=0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$

2) Montrer que l'équation : $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha\in]0;1[$

3) étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

Solution :

1)a)On a : f est est continue sur $\mathbb{R}$ (car c'est une fonction polynôme)

b) $f'(x)=3x^2+1\succ 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f strictement croissante sur $\mathbb{R}$

c) on a : $f(\mathbb{R})=f(]-\infty;+\infty[)=\left]\lim_{x\to-\infty}f(x);\lim_{x\to+\infty}f(x)\right[$

$=]-\infty;+\infty[$ et on a : $0\in f(\mathbb{R})$

donc d'après le **(T.V.I)** l'équation**)** l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$

1) on a f est est continue sur $[0;1]$ et $f(0)\times f(1)\prec 0$ ($f(0)=-1$ et $f(1)=1$)

et f strictement croissante sur $[0;1]$

Donc : d'après le **(T.V.I)** l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique dans $\alpha\in]0;1[$

3) étudions le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

1cas : si $x\le\alpha$ alors $f(x)\le f(\alpha)$(car f strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Donc $f(x)\le 0$ (car $f(\alpha)=0$)

2cas : si $x\ge\alpha$ alors $f(x)\ge f(\alpha)$(car f strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Donc $f(x)\ge 0$ (car $f(\alpha)=0$)

VI) FONCTIONS COMPOSEES ET FONCTIONS RECIPROQUES.

1) Le théorème

Activité : Soit $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

1- Montrer que pour tout y dans I = [0, +∞ [, l'équation $f(y)=x$ admet une solution unique dans l'intervalle J =]0,1]

2- Etudier la monotonie et la continuité de f sur $\mathbb{R}$

On dit que la fonction f admet une fonction réciproque de J =]**0**, **1**] vers I = [**0**, +∞[

Théorème : Soit f une fonction définie continue et strictement monotone sur un intervalle I, On a f admet une fonction réciproque f^{-1} définie de $J=f(I)$ vers I.

Preuve : Puisque f est continue et strictement monotone alors l'image de l'intervalle I est l'intervalle $J=f(I)$

Donc f est surjective par construction car : $(\forall x\in J=f(I))(\exists y\in I)(f(y)=x)$

Montrons que f est injective de I vers $f(I)$

On suppose pour la démonstration que f est strictement croissante (même démonstration si f est strictement décroissante)

Soient y_1 et y_2 deux éléments distincts de I (On suppose que $y_1>y_2$)

On a donc (puisque f est strictement croissante) $f(y_1)>f(y_2)$ donc $f(y_1)\neq f(y_2)$ et finalement f est injective

donc f est une bijection de I vers $f(I)$

D'où f admet une fonction réciproque f^{-1} de $J=f(I)$ vers I et on a :

$$\begin{cases}f(y)=x\\ y\in I\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=f^{-1}(x)\\ x\in f(I)\end{cases}$$

$(f\circ f^{-1})(x)=x\quad\forall x\in f(I)$

$(f^{-1}\circ f)(y)=y\quad\forall y\in I$

2)Application :

Exemple1 : Soit f la fonction définie par :

$f(x)=\frac{x-3}{x+2}$

1) Montrer que la fonction g la restriction de f sur intervalle $I = \left]-2;+\infty\right[$ admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un J qu'il faut déterminer.

2) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de l'intervalle J

Solution : 1) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$ $\quad D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \neq 0\}$

$D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

$$f'(x) = \left(\frac{x-3}{x+2}\right)' = \frac{(x-3)'(x+2)-(x-3)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{1(x+2)-1\times(x-3)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{5}{(x+2)^2} > 0$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	||	$+$
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow 1$

puisque g est strictement croissante et continue **sur :** $I = \left]-2;+\infty\right[$

donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $J = g(I) = g\left(\left]-2;+\infty\right[\right) = \left]-\infty;1\right[$

2) $\begin{cases} g(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = g^{-1}(x) \\ x \in g(I) \end{cases}$

$\begin{cases} g(y) = x \\ y \in \left]-2;+\infty\right[\end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{y-3}{y+2} = x \Leftrightarrow y-3 = x(y+2)$

$\Leftrightarrow y - xy = 2x+3 \Leftrightarrow y(1-x) = 2x+3$

$\Leftrightarrow \ y = \dfrac{2x+3}{1-x}$ Donc $g^{-1}(x) = \dfrac{2x+3}{1-x}$

Donc : $\begin{array}{l} g^{-1} : \left]-\infty;1\right[\to \left]-2;+\infty\right[\\ x \to g^{-1}(x) = \dfrac{2x+3}{1-x} \end{array}$

Exercice 13: Soit f la fonction définie sur $I = \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ par : $f(x) = \sqrt{2x-1}$

1) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un J qu'il faut déterminer.

2) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de l'intervalle J

3)Représenter (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans le même repére orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

Solution : 1) $D_f = \left[\frac{1}{2};+\infty\right[= I$

$\forall x \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ $\; f'(x) = \left(\sqrt{2x-1}\right)' = \dfrac{(2x-1)'}{2\sqrt{2x-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}} > 0$

x	$1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$0 \nearrow$	$+\infty$

Donc : f est strictement croissante et continue **sur :** $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[= I$

donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J = f(I) = f\left(\left[\frac{1}{2};+\infty\right[\right) = \left[0;+\infty\right[$

2) $\begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in f(I) \end{cases}$

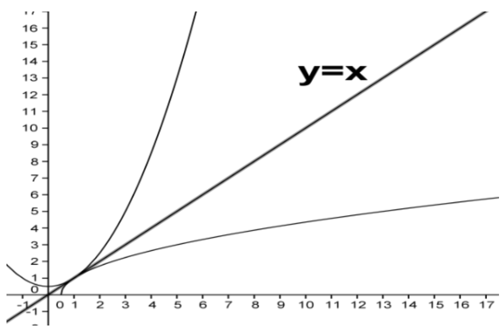
$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in \left[0;+\infty\right[\end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{2y-1} = x \Leftrightarrow 2y-1 = x^2$

$\Leftrightarrow 2y = x^2+1 \Leftrightarrow y = \dfrac{x^2+1}{2}$

Donc $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2+1}{2}$

Donc : $\begin{array}{l} f^{-1} : \left[0;+\infty\right[\to \left[\frac{1}{2};+\infty\right[\\ x \to f^{-1}(x) = \dfrac{x^2+1}{2} \end{array}$

3) $(C_{f^{-1}})$ et (C_f) sont symétriques par rapport à :(Δ) $y = x$



3) Propriété de la fonction réciproque

Propriété 1 : Si f admet une fonction réciproque f^{-1}de $J = f(I)$ vers I alors f^{-1} à la même monotonie sur J que celle de f sur I.

Preuve :

$$T_{f^{-1}} = \frac{f^{-1}(x_1) - f^{-1}(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{y_1 - y_2}{f(x_1) - f(x_2)}$$

$$T_{f^{-1}} = \frac{1}{\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{y_1 - y_2}}$$

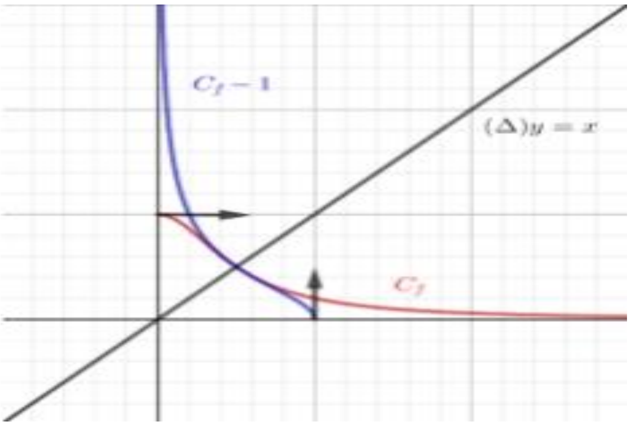
Donc le taux de f^{-1}sur J à le même signe que le taux de f sur I

Et on conclut.

Propriété 2 : Si f admet une fonction réciproque f^{-1}de $J = f(I)$ vers I alors $\left(C_{f^{-1}}\right)$ et $\left(C_f\right)$ sont symétriques par rapport à :(Δ) $y = x$

Remarque :

La symétrie des deux courbes concerne toutes leurs composantes ; les asymptotes ; les tangentes et demi-tangentes…



4) La fonction racine $n -$ éme

4.1 Définition et règles de calculs

Propriété et définition :

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$; la fonction :

$f : x \to x^n$ est une fonction continue strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$elle admet donc une fonction réciproque f^{-1} de $f\left(\mathbb{R}^+\right) = \mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$

La fonction réciproque f^{-1}s'appelle la fonction racine $n -$ éme et se note $\sqrt[n]{}$

Conséquence de la définition :

1)La fonction $\sqrt[n]{x}$ est définie sur ℝ+

2) $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \sqrt[n]{x} \geq 0$

3)(∀x ∈ ℝ+)(∀y ∈ ℝ+) $\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$

4)La fonction $\sqrt[n]{x}$ est continue sur ℝ+ strictement croissante.

5)(∀x ∈ ℝ+)(∀y ∈ ℝ+) $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$

6)(∀x ∈ ℝ+) (∀a ∈ ℝ+) $\sqrt[n]{x} \geq a \Leftrightarrow x \geq a^n$

7)(∀a ∈ ℝ+) $\sqrt[n]{x} \leq a \Leftrightarrow 0 \leq x \leq a^n$

8)(∀x ∈ ℝ+)$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = \sqrt[n]{x^n} = x$

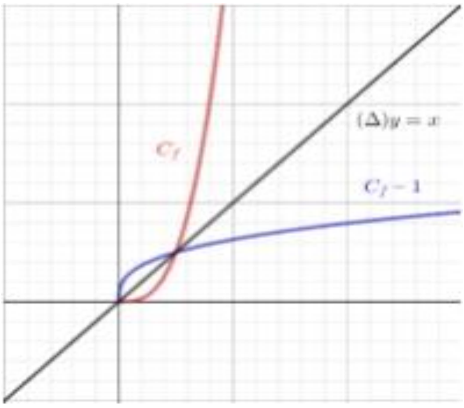
9)(∀x ∈ ℝ+)(∀p ∈ ℕ) $\left(\sqrt[n]{x}\right)^p = \sqrt[n]{x^p}$

10) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

11)Si $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{u(x)} = +\infty$

12)Si $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = l$ et $l \geq 0$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{u(x)} = \sqrt[n]{l}$

13)La courbe de la fonction $\sqrt[n]{}$



Règle de calcul :

1) (∀x ∈ ℝ+)(∀y ∈ ℝ+) $\sqrt[n]{x \times y} = \sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y}$

2) (∀x ∈ ℝ+)(∀y ∈ ℝ∗+) $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

3) (∀x ∈ ℝ+)(∀n ∈ ℕ∗)(∀p ∈ ℕ∗) $\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[n \times p]{x}$

4) (∀x ∈ ℝ+)(∀n ∈ ℕ∗)(∀p ∈ ℕ∗) $\sqrt[n]{x} = \sqrt[np]{x^p}$

(à prouver)

Remarque :

1) (∀x ∈ ℝ+) $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$

2) (∀x ∈ ℝ+) $\sqrt[1]{x} = x$

4.2 Résolution de l'équation $x^n = a$

Exemples : Résoudre dans ℝ les équations suivantes :

1) $x^5 = 32$ **2)** $x^7 = -128$ **3)** $x^4 = 3$ **4)** $x^6 = -8$

Solutions :1) $x^5 = 32$ **donc** $x > 0$

$x = \sqrt[5]{32} \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{2^5} \Leftrightarrow x = 2$ **donc :** $S = \{2\}$

2) $x^7 = -128$ donc $x < 0$

Donc : $x = -\sqrt[7]{128} \Leftrightarrow x = -\sqrt[7]{2^7} \Leftrightarrow x = -2$

Donc : $S = \{-2\}$

3) $x^4=3 \Leftrightarrow x=\sqrt[4]{3}$ ou $x=-\sqrt[4]{3}$

Donc : $S=\left\{-\sqrt[4]{3};\sqrt[4]{3}\right\}$

4) $x^6=-8$

On a $x^6 \geq 0$ et $-8<0$ donc $S=\Phi$

Exercices d'applications :

Exercice14 : simplifier les expressions suivantes :1) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3$ 2) $\sqrt[2]{\sqrt[4]{2}}$

3) $A=\sqrt[5]{32}-\left(\sqrt[7]{2}\right)^7+\sqrt[3]{\sqrt[3]{512}}+\dfrac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$

4) $B=\dfrac{\sqrt[3]{2}\times\sqrt[5]{16}\times\sqrt{\sqrt[3]{4}}\times\sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{256}}$

5) $C=\dfrac{(27)^{\frac{2}{9}}\times(81)^{\frac{1}{4}}\times 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}}$ 6) $D=\sqrt[6]{\dfrac{2^5\times 128000000}{27^2}}$

7) $E=\dfrac{\sqrt[5]{2}\times\sqrt{8}}{\sqrt{\sqrt[5]{128}}}$ 8) $F=\dfrac{\sqrt[3]{4}\times\sqrt{8}\times\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}}$

Solutions :1) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3=2$ 2) $\sqrt[2]{\sqrt[4]{2}}=\sqrt[2\times4]{2}=\sqrt[8]{2}$

2) $A=\sqrt[5]{32}-\left(\sqrt[7]{2}\right)^7+\sqrt[3]{\sqrt[3]{512}}+\dfrac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}=\sqrt[5]{2^5}-2+\sqrt[3]{\sqrt[3]{2^9}}+\sqrt[4]{\dfrac{96}{3}}$

$$A=2-2+\sqrt[9]{2^9}+\sqrt[5]{32}=2-2+2+2=4$$

3) $B=\dfrac{\sqrt[3]{2}\times\sqrt[5]{16}\times\sqrt[6]{4}\times\sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{256}}=\dfrac{\sqrt[3]{2}\times\sqrt[5]{2^4}\times\sqrt[6]{2^2}\times\sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{256}}$

4)

$$B=\frac{2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{4}{5}}\times 2^{\frac{2}{6}}\times 2^{\frac{1}{15}}}{\sqrt[15]{2^8}}=\frac{2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{4}{5}}\times 2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{1}{15}}}{2^{\frac{8}{15}}}=\frac{2^{\frac{23}{15}}}{2^{\frac{8}{15}}}=2^{\frac{23}{15}-\frac{8}{15}}=2^{\frac{15}{15}}=2$$

5) $C=\dfrac{(27)^{\frac{2}{9}}\times(81)^{\frac{1}{4}}\times 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}}=\dfrac{\left(3^3\right)^{\frac{2}{9}}\times\left(3^4\right)^{\frac{1}{4}}\times\left(3^2\right)^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}}=\dfrac{3^{\frac{2}{3}}\times 3^1\times 3^5}{3^{\frac{17}{3}}}$

$$C=\frac{3^{\frac{20}{3}}}{3^{\frac{17}{3}}}=3^{\frac{20}{3}-\frac{17}{3}}=3^{\frac{3}{3}}=3^1=3$$

6) $D=\sqrt[6]{\dfrac{2^5\times 128000000}{27^2}}=\sqrt[6]{\dfrac{2^5\times 2^7\times 10^6}{\left(3^3\right)^2}}=\sqrt[6]{\dfrac{10^6}{3^6}\times 2^{12}}=$

$$D=\sqrt[6]{\left(\frac{10}{3}\right)^6}\times\sqrt[6]{\left(2^2\right)^6}=\frac{10}{3}\times 2^2=\frac{40}{3}$$

7)

$$E=\frac{\sqrt[5]{2}\times\sqrt{8}}{\sqrt{\sqrt[5]{128}}}=\frac{\sqrt[5]{2}\times\sqrt{2^3}}{\sqrt[10]{2^7}}=\frac{\sqrt[10]{2^2}\times\sqrt[10]{2^{15}}}{\sqrt[10]{2^7}}$$

$$=\frac{\sqrt[10]{2^{17}}}{\sqrt[10]{2^7}}=\sqrt[10]{2^{10}}=2$$

8) $F=\dfrac{\sqrt[3]{4}\times\sqrt{8}\times\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}}=\dfrac{4^{\frac{1}{3}}\times 8^{\frac{1}{2}}\times\left(\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2}{\left(4^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}$

$$F=\frac{4^{\frac{1}{3}}\times 8^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{2}{4}}}{4^{\frac{1}{6}}}=\frac{2^{\frac{2}{3}}\times 2^{\frac{3}{2}}\times 2^{\frac{2}{4}}}{2^{\frac{2}{6}}}=2^{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}+\frac{2}{4}-\frac{1}{3}}=2^{\frac{7}{3}}$$

$$F=2^{2+\frac{1}{3}}=2^2\times 2^{\frac{1}{3}}=4\sqrt[3]{2}$$

Exercice15 : comparer : $\sqrt[5]{2}$ et $\sqrt[7]{3}$

Solutions : on a : $\sqrt[n\times m]{x^m}=\sqrt[n]{x}$

$\sqrt[7]{3}=\sqrt[7\times5]{3^5}=\sqrt[35]{243}$ et $\sqrt[5]{2}=\sqrt[7\times5]{2^7}=\sqrt[35]{128}$

On a : $\sqrt[35]{243}>\sqrt[35]{128}$ car $243>128$

Donc **:** $\sqrt[7]{3}>\sqrt[5]{2}$

Exercice 16 : résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $\sqrt[5]{3x-4}=2$ 2) $\left(\sqrt[5]{x}\right)^2-5\sqrt[5]{x}+6=0$

Solutions :1)

$\sqrt[5]{3x-4}=2 \Leftrightarrow \left(\sqrt[5]{3x-4}\right)^5=(2)^5 \Leftrightarrow 3x-4=32$

$\Leftrightarrow x=12$ donc : $S=\{12\}$

2) $\left(\sqrt[5]{x}\right)^2-5\sqrt[5]{x}+6=0$ on pose : $\sqrt[5]{x}=X$

L'équation devient : $X^2-5X+6=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times1\times6=25-24=1>0$

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=3$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=2$

Donc : $\sqrt[5]{x}=3$ ou $\sqrt[5]{x}=2$

Donc : $x=243$ ou $x=32$

Donc : $S=\{32;243\}$

Exercice 17 : calcules les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to2}\sqrt[5]{x^3+24}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^5+2x^3-x+4}$

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$ 4) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$

5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{2x+6}-\sqrt{x+3}}{x-1}$ 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-2}}$

7) $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}$

Solutions :

1) $\lim\limits_{x\to2}\sqrt[5]{x^3+24}=\sqrt[5]{2^3+24}=\sqrt[5]{8+24}=\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^5+2x^3-x+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^5}=\sqrt[3]{+\infty}=+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)''$ FI

On a : $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}{x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3-(1)^3}{x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x+1-1}{x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2}=\frac{1}{1+1\times1+1}=\frac{1}{3}$$

4) $\lim\limits_{x\to8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}=\left(\frac{0}{0}\right)''$ FI

On a : $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

$$\lim_{x\to8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}=\lim_{x\to8}\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-2^3}{(x-8)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\times\sqrt[3]{x}+2^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to8}\frac{x-8}{(x-8)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\times\sqrt[3]{x}+2^2\right)}=\lim_{x\to8}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\times\sqrt[3]{x}+4}=\frac{1}{12}$$

5) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{2x+6}-\sqrt{x+3}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{2x+6}-2}{x-1}-\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2x+6-8}{(x-1)\left(\left(\sqrt[3]{2x+6}\right)^2+2\times\sqrt[3]{2x+6}+2^2\right)}-\frac{x+3-4}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2}{\left(\sqrt[3]{2x+6}\right)^2+2\times\sqrt[3]{2x+6}+2^2}-\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}-\frac{1}{4}=\frac{-1}{12}$$

6)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[6]{(x+1)^3}}{\sqrt[6]{\left(x^2-2\right)^2}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[6]{\frac{(x+1)^3}{\left(x^2-2\right)^2}}=0$$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^3}{\left(x^2-2\right)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

7) $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt[4]{(x-1)^2}}=\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt[4]{\frac{x^2-1}{(x-1)^2}}$

$$=\lim_{x\to1^+}\sqrt[4]{\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-1)}}=\lim_{x\to1^+}\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}=+\infty$$

Car : $\lim\limits_{x\to1^+}x+1=2$ et $\lim\limits_{x\to1^+}x-1=0^+$

Exercice18 : simplifier les expressions suivantes :1) $A=\frac{\sqrt[3]{1024}\times\sqrt[5]{3200000}}{\sqrt[4]{64}\times\sqrt[3]{\sqrt{252}}\times\sqrt{18}}$

2) a)comparer : $\sqrt[5]{4}$ **et** $\sqrt[4]{3}$

b) comparer : $\sqrt[3]{28}$ et $\sqrt{13}$

c) comparer : $\sqrt[5]{23}$ et $\sqrt[15]{151}$

Solutions :1)

$$A=\frac{\sqrt[3]{1024}\times\sqrt[5]{3200000}}{\sqrt[4]{64}\times\sqrt[3]{\sqrt{252}}\times\sqrt{18}}=\frac{\sqrt[3]{2^{10}}\times\sqrt[5]{2^{10}\times10^5}}{\sqrt[4]{2^6}\times\sqrt[3]{\sqrt{2^8}}\times\sqrt{2\times3^2}}$$

$$A=\frac{2^{\frac{10}{3}}\times2\times10}{2^{\frac{1}{4}}\times2^{\frac{4}{3}}\times3\times2^{\frac{1}{2}}}=20$$

2) a)comparaison de : $\sqrt[5]{4}$ et $\sqrt[4]{3}$

on a $\sqrt[n\times m]{x^m}=\sqrt[n]{x}$

et on a : $\sqrt[4]{3}=\sqrt[4\times5]{3^5}=\sqrt[20]{243}$ et $\sqrt[5]{4}=\sqrt[4\times5]{4^4}=\sqrt[20]{256}$

donc $\sqrt[5]{4}>\sqrt[4]{3}$ car $256>243$

b)comparaison de : $\sqrt[3]{28}$ et $\sqrt{13}$

on a $\sqrt[3]{28}=\sqrt[6]{28^2}=\sqrt[6]{784}$ et

$\sqrt{13}=\sqrt[2]{13}=\sqrt[2\times3]{13^3}=\sqrt[6]{2197}$

on a $\sqrt[6]{2197}>\sqrt[6]{784}$ car $\sqrt{13}>\sqrt[3]{28}$

b)comparaison de : $\sqrt[15]{151}$ et $\sqrt[5]{23}$

$\sqrt[5]{23}=\sqrt[15]{23^3}=\sqrt[15]{12167}$

Donc : $\sqrt[5]{23}>\sqrt[15]{151}$

4.3 L'expression conjuguai et ses applications

On sait que $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

et $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$ Il en résulte :

$a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$ et $a+b=\frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$

Par suite :$(\forall x\in\mathbb{R}+)(\forall y\in\mathbb{R}*+)$

$$\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=\frac{x-y}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+\left(\sqrt[3]{y}\right)^2}$$

$(\forall x\in\mathbb{R}+)(\forall y\in\mathbb{R}*+)$

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\frac{x+y}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2-\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+\left(\sqrt[3]{y}\right)^2}$$

Applications :

Exercice19 :1) Rendre le dénominateur rationnel

$a=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}-2}$ $b=\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$ $c=\frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5}}$

$d=\frac{1}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}$

2) Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1}$ b) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+1}-x$

Solutions :1)

$a=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}-2}$ on utilise : $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$$a=\frac{3\sqrt{2}\left(\sqrt[3]{2}^2+2\sqrt[3]{2}+2^2\right)}{\left(\sqrt[3]{2}-2\right)\left(\sqrt[3]{2}^2+2\sqrt[3]{2}+2^2\right)}=\frac{3\sqrt{2}\left(\sqrt[3]{2}^2+2\sqrt[3]{2}+2^2\right)}{\sqrt[3]{2}^3-2^3}$$

$$a=\frac{3\sqrt{2}\left(\sqrt[3]{2}^3+2\sqrt[3]{2}+2^2\right)}{-6}=-\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt[3]{2}^3+2\sqrt[3]{2}+2^2\right)}{2}$$

$$b=\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}=\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}\times1+1^2\right)}$$

$$b=\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3-1^3}=\sqrt[3]{2}-1$$

$$c=\frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5}}=\frac{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2}}{\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5}\right)\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2}\right)}$$

$$c=\frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5}}=\frac{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2}}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3-\left(\sqrt[3]{5}\right)^3}=-\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}}{3}$$

$$d=\frac{1}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2^2}}$$

$$d=\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}{\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2^2}\right)}=\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}{\left(\sqrt[3]{5}\right)^3-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}$$

$$d=\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}{3}$$

2) a) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1}$ on utilise :

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\times1+1^2\right)}{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}\right)\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\times1+1^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-2(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\times1+1\right)}{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}\right)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-1^3\right)}=\lim_{x\to1}\frac{-2\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\times1+1\right)}{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}\right)}=\frac{-6}{2}=\frac{-3}{2}$$

b)

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}-x\right)\left(\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}\times1+x^2\right)}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}\times1+x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}\times1+x^2}=0$$

D'ordre 4 :

On sait que $a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$

Il en résulte : $a-b=\frac{a^4-b^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}$

Par suite :$(\forall x\in\mathbb{R}^+)(\forall y\in\mathbb{R}^{*+})$

$$\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=\frac{x-y}{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2y}+\sqrt[4]{xy^2}+\sqrt[4]{y^3}}$$

A remarquer qu'on ne peut pas factoriser :

a^4+b^4

Exercice20 : Déterminer la limite suivante :

$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[4]{20x^2-4}-2}{2x^2+x-3}$

Solutions : $\frac{\sqrt[4]{20x^2-4}-2}{2x^2+x-3}=\frac{\sqrt[4]{20x^2-4}-\sqrt[4]{16}}{2x^2+x-3}$

$$=\frac{20x^2-4-16}{(2x^2+x-3)\left(\sqrt[4]{(20x^2-4)^3}+\sqrt[4]{(20x^2-4)^2 4}+\sqrt[4]{(20x^2-4)16}+\sqrt[4]{16^3}\right)}$$

$$=\frac{20(x+1)}{(2x+3)\left(\sqrt[4]{(20x^2-4)^3}+\sqrt[4]{(20x^2-4)^2 4}+\sqrt[4]{(20x^2-4)16}+\sqrt[4]{16^3}\right)}$$

Donc : $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[4]{20x^2-4}-2}{2x^2+x-3}=\frac{1}{8}$

Exercice21: 1)simplifier les expressions

suivantes : $A=\frac{\sqrt[15]{3^5}\times\sqrt[3]{9}\times\left(\sqrt[5]{9}\right)^3}{\sqrt[5]{3}}$

et $B=\frac{\sqrt[4]{9}\times\sqrt{\sqrt[3]{3^3}\times\sqrt{9}}}{\sqrt[5]{81}\times\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

a) $\sqrt[3]{x-1}=3$ b) $x^{\frac{2}{3}}-7x^{\frac{1}{3}}-8=0$

c) $\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}-12=0$

2)Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[5]{x^5+x^2+1}$ b) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x+1}-1}$

Solution :

$$A=\frac{\sqrt[15]{3^5}\times\sqrt[3]{9}\times\left(\sqrt[5]{9}\right)^3}{\sqrt[5]{3}}=\frac{\left(3^5\right)^{\frac{1}{15}}\times\left(3^2\right)^{\frac{1}{3}}\times\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^3}{3^{\frac{1}{5}}}=\frac{3^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{2}{3}}\times3^{\frac{3}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}}$$

$$A=\frac{3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}}=\frac{3^{\frac{8}{3}}}{3^{\frac{1}{5}}}=3^{\frac{8}{3}-\frac{1}{5}}=3^{\frac{37}{15}}=\left(\sqrt[15]{3}\right)^{37}$$

$$B=\frac{\sqrt[4]{9}\times\sqrt{\sqrt[3]{3^3}\times\sqrt{9}}}{\sqrt[5]{81}\times\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}=\frac{\left(3^2\right)^{\frac{1}{4}}\times\left(3^4\right)^{\frac{1}{6}}}{\left(3^4\right)^{\frac{1}{5}}\times(3)^{\frac{1}{8}}}=\frac{3^{\frac{1}{2}}\times3}{\left(3^4\right)^{\frac{1}{5}}\times(3)^{\frac{1}{8}}}$$

$$B=\frac{3^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{4}{5}}\times(3)^{\frac{1}{8}}}=3^{\frac{3}{2}}\times3^{-\frac{4}{5}}\times(3)^{-\frac{1}{8}}=3^{\frac{3}{2}-\frac{4}{5}-\frac{1}{8}}=3^{\frac{11}{8}-\frac{4}{5}}=3^{\frac{55}{40}-\frac{32}{40}}$$

$$B=3^{\frac{23}{40}}=\sqrt[40]{3^{23}}$$

2) a) $\sqrt[3]{x-1}=3\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^3=3^3\Leftrightarrow x-1=27$

$\Leftrightarrow x=28$ donc : $S=\{28\}$

b) $x^{\frac{2}{3}}-7x^{\frac{1}{3}}-8=0\Leftrightarrow\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2-7x^{\frac{1}{3}}-8=0$

on pose : $x^{\frac{1}{3}}=X$ donc : $X^2-7X-8=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4\times1\times(-8)=49+32=81>0$

$x_1=\frac{7+9}{2\times1}=\frac{16}{2}=8$ et $x_2=\frac{7-9}{2\times1}=\frac{-2}{2}=-1$

Donc : $x^{\frac{1}{3}}=8$ ou $x^{\frac{1}{3}}=-1$

$x^{\frac{1}{3}}=-1$ n'a pas de solutions

$x^{\frac{1}{3}}=8\Leftrightarrow\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3=(8)^3\Leftrightarrow x=512$

Donc : $S=\{512\}$

c) $\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}-12=0$ on a $x\geq0$

$\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}-12=0\Leftrightarrow\sqrt[6]{x^3}-\sqrt[6]{x^2}-12=0$

on pose : $\sqrt[6]{x}=X$ donc : $X^3+X^2-12=0$

on remarque que 2 est racine de cette équation

donc : $X^3+X^2-12=(X-2)\left(X^2+3X+6\right)$

$X^3+X^2-12=0\Leftrightarrow X=2$ ou $X^2+3X+6=0$

$\Delta=-15\prec0$ donc $X^2+3X+6=0$ n'a pas de solutions

Donc : $X=2\Leftrightarrow\sqrt[6]{x}=2\Leftrightarrow x=2^6=64$

Donc : $S=\{64\}$

2) a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[5]{x^5+x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[5]{x^5}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$ on a $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

b) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x}+1^2\right)}{(x-1)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x}+1^2\right)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-1^3\right)}{(x-1)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x}+1^2\right)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x}+1^2\right)}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x}+1^2\right)}=\frac{1}{1+1\times1+1}=\frac{1}{3}$$

c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x+1}-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}{\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3-(1)^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)=1\times3=3$$

Exercice 22:

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^4=16$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(x-1)^3=-27$

Exercice 23 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $\sqrt[3]{x}-x=0$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$\sqrt[3]{x}-5\sqrt[6]{x}+6=0$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :
$\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x-2}\succ1$

5) Puissance rationnelle :

5.1 Puissance entier

Rappelle : Soit x un réel et n un entier naturel non nul on a : $x^n=\underbrace{x\times x\times\ldots\times x}_{n fois}$ et $(x\neq0)$

$$\frac{1}{x^n}=x^{-n}$$

5.2 Puissance rationnelle

Propriété : Pour tout réel $x \geq 0$ et pour tout entier non nul q on pose : $\sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}}$

Définition :

Soit x un réel positif et r un rationnel ($r \in \mathbb{Q}$) ;

$r = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}*$ on pose :

$$x^r = x^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p$$

Exemple : $2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$

$$2^{-\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{2^{-2}} = \sqrt[7]{\frac{1}{2^2}} = \sqrt[7]{\frac{1}{4}}$$

Propriétés

Soit x et y deux réels positifs, r et r' des rationnels on a :

1.	$x^{r+r'} = x^r \times x^{r'}$
2.	$x^{r\times r'} = (x^r)^{r'} = (x^{r'})^r$
3.	$x^{-r'} = \frac{1}{x^{r'}} \quad (x \neq 0)$
4.	$x^{r-r'} = \frac{x^r}{x^{r'}} \quad (x \neq 0)$
5.	$(xy)^r = x^r y^r$
6.	$\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$

6) la fonction Arctangente :

Activité : 1- Déterminer :

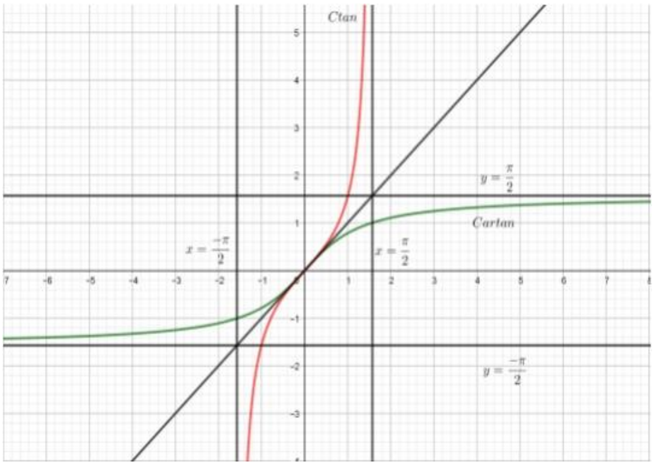
$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x$

2- Montrer que la restriction de la fonction tan sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ Vers $\mathbb{R}$.

Propriété et définition : La restriction de la fonction tan sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ Vers $\mathbb{R}$.

Sa bijection réciproque s'appelle la fonction arc tangente, notée : $\boldsymbol{artan}$ elle est définie de $\mathbb{R}$ vers $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

La courbe de la fonction $\boldsymbol{arctan}$:



Résultats :

1) $\begin{cases} ar\tan x = y \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ y \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} ar\tan x = \frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} ar\tan x = -\frac{\pi}{2}$

3) $(\forall x \in \mathbb{R})(\tan(arctan\ x) = x)$

et $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ arctan$(tan\ x) = x$

4) La fonction $artan$ est continue et impaire strictement croissante sur $\mathbb{R}$

5) $ar\tan x = ar\tan y \Leftrightarrow x = y \quad \forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$

$ar\tan x \prec ar\tan y \Leftrightarrow x \prec y \quad \forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$

6) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{ar\tan x}{x} = 1$

7) $(\forall x \in \mathbb{R}+)$ $(arctan\ x + arctan\ (1/x) = \pi/2)$

et $(\forall x \in \mathbb{R}-)$ $(arctan\ x + arctan\ (1/x) = -\pi/2)$

(Propriété à démontrer)

Exercice 24 : Déterminer les réels suivants :

1) $a = Arctan\ (tan\ (\frac{2007\pi}{5}))$

2) $b = tan\ (Arctan\ (\frac{2007\pi}{5}))$

3) $c = tan(Arctan(-1))$

4) $d = Arctan\ (tan\ (-1))$

5) $e = tan(Arctan\sqrt{123})$

Solution : 1) on a si $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$:

arctan$(tan\ x) = x$

a = $Arctan\ (tan\ (\frac{2007\pi}{5}))$

= $Arctan\ (tan\ (405\pi+\frac{2\pi}{5}))$= $Arctan\ (tan\ (\frac{2\pi}{5}))$

Et puisque : $-\frac{\pi}{2}\prec\frac{2\pi}{5}\prec\frac{\pi}{2}$ alors : $a=\frac{2\pi}{5}$

2)b = $tan\ (Arctan\ (\frac{2007\pi}{5}))=\frac{2007\pi}{5}$

Car : $(\forall x\in\mathbb{R})(\tan(arctan\ x)=x)$

3)$c=tan(Arctan(-1))=-1$

4)d = $Arctan\ (tan\ (-1))=-1$ car $-\frac{\pi}{2}\prec-1\prec\frac{\pi}{2}$

5)e = $tan(Arctan\sqrt{123})=\sqrt{123}$

Exercice 25 : on considère les nombres suivants : $a=Arctan\frac{1}{2}$ et b = $Arctan\frac{1}{5}$

et c = $\frac{\pi}{4}-Arctan\frac{1}{8}$

1)montrer que : tan (a+b)= tan c

2)En déduire que :

$Arctan\frac{1}{2}+Arctan\frac{1}{5}+Arctan\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$

Solution : 1)on a : $\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\times\tan b}$

$$\tan(a+b)==\frac{\tan\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+\tan\arctan\left(\frac{1}{5}\right)}{1-\tan\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\times\text{an}\arctan\left(\frac{1}{5}\right)}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}}=\frac{7}{9}$$

$$\tan c=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\left(\frac{1}{8}\right)\right)=\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)-\tan\arctan\left(\frac{1}{8}\right)}{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\times\tan\arctan\left(\frac{1}{8}\right)}$$

$\tan c=\frac{1-\frac{1}{8}}{1+\frac{1}{8}}=\frac{7}{9}$ Donc : tan (a+b)= tan c

2) $0\prec\frac{1}{2}\prec1\Rightarrow\arctan0\prec\arctan\frac{1}{2}\prec\arctan1\Rightarrow0\prec\arctan\frac{1}{2}\prec\frac{\pi}{4}$

$0\prec\frac{1}{5}\prec1\Rightarrow\arctan0\prec\arctan\frac{1}{5}\prec\arctan1\Rightarrow0\prec\arctan\frac{1}{5}\prec\frac{\pi}{4}$

Donc $0\prec a+b\prec\frac{\pi}{2}$

Et on a : $0\prec\frac{1}{8}\prec1\Rightarrow0\prec\arctan\frac{1}{8}\prec\frac{\pi}{4}\Rightarrow0\prec\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{8}\prec\frac{\pi}{4}$

Donc $0\prec c\prec\frac{\pi}{4}$

On a : tan (a+b)= tan c et puisque tan est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ Vers $\mathbb{R}$.

Donc : a+b=c

Cad : $Arctan\frac{1}{2}+Arctan\frac{1}{5}=\frac{\pi}{4}-Arctan\frac{1}{8}$

Donc : $Arctan\frac{1}{2}+Arctan\frac{1}{5}+Arctan\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$

Exercice26 : Considérons la fonction f définie par : $f(x)=x\cos\frac{1}{x}$; $si\ x\neq0$ et $f(0)=0$

1)Etudier la continuité de f en $x_0=0$

2) Etudier la continuité de f sur les intervalles $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$ et est ce f est continue sur $\mathbb{R}$

3) $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ **Solution :** 1) $x\in\mathbb{R}^*$ $\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|\le1$

donc : $|x|\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|\le|x|$ donc : $\left|x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|\le|x|$

donc : $-|x|\le f(x)\le|x|$

et puisque : $\lim_{x\to0}|x|=0$ et $\lim_{x\to0}-|x|=0$

Alors : $\lim_{x\to0}f(x)=0=f(0)$

Donc :f est continue en $x_0=0$

2)on a la fonction : $f_1:x\to\frac{1}{x}$ continue sur les intervalles $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$ et les fonctions : $f_2:x\to\cos x$ et $f_3:x\to x$ sont continués sur les intervalles $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$

Donc : $f=f_3\times(f_2\circ f_1)$ est continue sur les intervalles $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$

Et puisque : f est continue en $x_0=0$

Alors f est continue sur $\mathbb{R}$

3) $\lim_{x\to+\infty}f(x)$?

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $x\to\cos x$ est continue en $x_0=0$

Donc $\lim_{x\to+\infty}\cos\frac{1}{x}=\cos0=1$

Et puisque : $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

Alors $\lim_{x\to+\infty} x\cos\frac{1}{x} = +\infty$

Exercice 27: Considérons la fonction f définie par : $f(x)=E(x)+\left(x-E(x)\right)^2$; $si\ x \neq 0$ et $f(0)=0$

1)Etudier la continuité de f en $x_0 = 2$

2)Etudier la continuité de f en $x_1 = \sqrt{2}$

3) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$

Solution : 1) on va écrire f sur les intervalles

Bien définies : $\begin{cases} f(x)=1+(x-1)^2; si...x\in[1;2[\\ f(x)=2+(x-2)^2; si...x\in[2;3[\end{cases}$

On a $f(2)=2$

$\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-} 1+(x-1)^2 = 2 = f(2)$

donc f est continue à gauche de $x_0 = 2$

$\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+} 2+(x-2)^2 = 2 = f(2)$

donc f est continue à droite de $x_0 = 2$

et puisque f est continue à droite et à gauche de $x_0 = 2$ alors f est continue en $x_0 = 2$

2)Etudions la continuité de f en $x_1 = \sqrt{2}$

Puisque les fonctions : $g: x \to E(x)$ et $h: x\to x$ sont continues en $x_1 = \sqrt{2}$

alors : $f = g+(h-g)^2$ est continue en $x_1 = \sqrt{2}$

3)Etudions la continuité de f sur $\mathbb{R}$

Puisque les fonctions : $g: x \to E(x)$ et $h: x\to x$ sont continues sur chaque intervalle dans $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

Alors la fonction : $f = g+(h-g)^2$ est continue sur chaque intervalle dans $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

3)Etudions la continuité de f sur $\mathbb{Z}$

Soit : $k\in\mathbb{Z}$ on a $f(k)=k$

$\begin{cases} f(x)=k-1+(x-k+1)^2; si...x\in[k-1;k[\\ f(x)=k+(x-k)^2; si...x\in[k;k+1[\end{cases}$

$\lim_{x\to k^-} f(x)=\lim_{x\to k^-} k-1+(x-k+1)^2 = k = f(k)$

donc f est continue à gauche de $x_0 = k$

$\lim_{x\to k^+} f(x)=\lim_{x\to k^+} k+(x-k)^2 = k = f(k)$

donc f est continue à droite de $x_0 = k$

et puisque f est continue à droite et à gauche de $x_0 = k$ alors f est continue sur $\mathbb{Z}$

conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice28 : soient f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ tels que f est bornée et g continue sur $\mathbb{R}$;Montrer que $f\circ g$ et $g\circ f$ sont bornées sur $\mathbb{R}$

Solution :1) f est bornée sur $\mathbb{R}$ donc il existent deux réels m et M tel que : $\forall x\in\mathbb{R}$

$m\le f(x)\le M$

Donc : $f(x)\in[m;M]$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Donc : $g(f(x))\in g([m;M])$ $\forall x\in\mathbb{R}$

et puisque g est continue sur $\mathbb{R}$ alors g est continue sur $[m;M]$ donc il existent deux réels a et b tel que $g([m;M])=[a;b]$

donc $g(f(x))\in[a;b]$ $\forall x\in\mathbb{R}$

donc $a\le g(f(x))\le b$ $\forall x\in\mathbb{R}$

donc $a\le (g\circ f)(x)\le b$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Donc $g\circ f$ sont bornée sur $\mathbb{R}$

2)la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ donc : $g(\mathbb{R})=I$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$

et puisque f est bornée sur $\mathbb{R}$ Donc : $f(y)\in[m;M]$ $\forall y\in I$

Donc : $f(g(x))\in[m;M]$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Donc : $m\le (f\circ g)(x)\le M$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Donc $f\circ g$ sont bornée sur $\mathbb{R}$

Exercice 29: Considérons la fonction f continue Sur l'intervalle $[a;b]$ et x_1 et x_2 et x_3 des nombres de l'intervalle $[a;b]$

Montrer que l'équation : $3f(x)=f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)$ admet au moins une solution dans $[a;b]$

Solution :

On considéré la fonction g définie sur $[a;b]$ par

$g(x)=3f(x)-\left(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)\right)$

la fonction g est continue sur l'intervalle $[a;b]$

soit $f(\alpha)$ le plus petit des nombres $f(x_1)$; $f(x_2)$

; $f(x_3)$ et soit $f(\beta)$ le plus grand des nombres $f(x_1)$; $f(x_2)$ et $f(x_3)$

On a : $g(\alpha)=3f(\alpha)-\left(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)\right)$

$g(\alpha)=\left(f(\alpha)-f(x_1)\right)+\left(f(\alpha)-f(x_2)\right)+\left(f(\alpha)-f(x_3)\right)$

Donc : $g(\alpha)\leq 0$

De même **:** on a : $g(\beta)=3f(\beta)-\left(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)\right)$

$g(\alpha)=\left(f(\beta)-f(x_1)\right)+\left(f(\beta)-f(x_2)\right)+\left(f(\beta)-f(x_3)\right)$

Donc : $g(\beta)\geq 0$

et puisque g est continue sur $[a;b]$

Donc : d'après le **(T.V.I)** il existe un réel c dans $[a;b]$ tel que : g(c) = 0

Cad $3f(c)=f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)$

Donc l'équation $3f(x)=f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)$ admet au moins une solution dans $[a;b]$

Exercice30 : soient f et g sont deux fonctions continues sur $[a;b]$ tels que :

$0\prec g(x)\prec f(x) \quad \forall x\in[a;b]$

Montrer que :

$\exists\lambda\in\mathbb{R}_+^* / \forall x\in[a;b];(1+\lambda)g(x)\leq f(x)$

Solution : Montrons que :

$\exists\lambda\in\mathbb{R}_+^* / \forall x\in[a;b];(1+\lambda)g(x)\leq f(x)$ Cad :

$\exists\lambda\in\mathbb{R}_+^* / \forall x\in[a;b];\lambda\leq\dfrac{f(x)}{g(x)}-1$

On considéré la fonction h définie sur $[a;b]$ par

$h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}-1$ la fonction h est continue sur l'intervalle $[a;b]$ car f et g sont continues sur l'intervalle $[a;b]$ et $g(x)\neq 0\ \forall x\in[a;b]$ Donc la fonction h admet un minimum λ Cad il existe $x_0\in[a;b]$ tel que :

$\lambda=h(x_0)=\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}-1$ et $\lambda\leq h(x) \quad \forall x\in[a;b]$

On a : $0\prec g(x_0)\prec f(x_0)$ donc $0\prec\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}-1$

donc : $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$ donc :

$\exists\lambda\in\mathbb{R}_+^* / \forall x\in[a;b];(1+\lambda)g(x)\leq f(x)$

Exercice 31: Considérons la fonction f continue Sur l'intervalle $[a;b]$ tel que : $f(a)\prec 0$

il existe $x_0\in]a;b[$ tel que : $f(x_0)=\dfrac{a-x_0}{b-x_0}$

Solution :

On a : $f(x_0)=\dfrac{a-x_0}{b-x_0}\Leftrightarrow(b-x_0)f(x_0)-(a-x_0)=0$

On considéré la fonction g définie par :

$g(x)=(b-x)f(x)-(a-x)$;la fonction g est continue sur l'intervalle $[a;b]$ car c'est la somme de fonctions continues sur $[a;b]$

On a : $g(a)=(b-a)f(a)\prec 0$ car $f(a)\prec 0$

Et $b-a\succ 0$ et on a : $g(b)=b-a\succ 0$

Donc : d'après le **(T.V.I)** il existe $x_0\in]a;b[$ tel que : $g(x_0)=0$ cad $f(x_0)=\dfrac{a-x_0}{b-x_0}$

Exercice 32 : Soit la fonction $f(x)=x^2+x+1$ définie sur $\mathbb{R}$.

1- Déterminer $J=f([0,1])$

2- Montrer que f admet une fonction réciproque de J vers [0,1] et déterminer $f^{-1}(x)\ \forall x\in J$

Exercice 33 : Soit la fonction $g(x)=x-2\sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$.

1- Montrer que g est strictement croissante sur [1, +∞[puis déterminer $J=g([1,+\infty[)$

2- Montrer que g admet une fonction réciproque de J vers [1, +∞[et déterminer $g^{-1}(x)\ \forall x\in J$

Exercice 34 : Soit la fonction $h(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$

Montrer que h est une bijection de] − 1,1[vers un intervalle J qu'il faut déterminer et déterminer et déterminer $h^{-1}(x)\ \forall x\in J$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe. C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien