Exercice 1

Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}$ ، $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x}$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^3(\ln x)^4$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{x}\,\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln\left(2+3\sqrt{x}\right)}{\ln\left(1+2x^2\right)}$ ، $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x\,\ln(x+1)}{x}$ ، $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\left(\dfrac{2x+1}{2x+3}\right)$ ، $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(\ln x)^3}{x^2}$

Exercice 2

Résoudre les équations et inéquations ci-dessous

1) $2\ln(x-2)-\ln(x+3)=0$ ، $(\ln x)^2-3\ln x+2=0$ ، $(\ln x)^3-\ln x=0$

2) $\ln\left(x^2-x\right)+\ln\left(\dfrac{1}{3x+4}\right)<0$ ، $\ln x-2\geq\dfrac{4}{\ln x}$ ، $\ln x>-1+\ln 2$

Exercice 3

1) montrer que $(\forall x\in\,]0,+\infty[)\ \ln(1+x)\leq x\leq(x+1)\ln(1+x)$

2) a) montrer que : $\displaystyle\prod_{k=1}^{k=n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\leq e^n\leq\prod_{k=1}^{k=n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$

b) en déduire $\lim\limits_{n\to +\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$

Exercice 4

1) a) montrer que $(\forall\in\,]0,+\infty[)\quad \ln t\leq t-1$

b) en déduire que $\left(\forall\in\mathbb{R}^{+*}\right)\quad x\ln x\geq x-1$

2) montrer que $(\forall x\in[1,+\infty[)\quad x\ln x\leq\dfrac{1}{2}\left(x^2-1\right)$

3) soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x\ln x$

a) étudier le sens de variation de f puis dresser le tableau de variations

b) soit n de $\mathbb{N}^*$ montrer que l'équation $f(x)=\dfrac{1}{n}$ admet une seule solution a_n et $1<a_n<e$

c) étudier la monotonie de $(a_n)_{n\geq 1}$ et déduire qu'elle est convergente

d) montrer que $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\quad \sqrt{1+\dfrac{2}{n}}\leq a_n\leq 1+\dfrac{1}{n}$ puis calculer $\lim\limits_{n\to +\infty} a_n$

Exercice 5

Soit n un entier tel que $n\geq 3$. on considère la fonction f_n définie sur $]0,+\infty[$ par : $f_n(x)=x^2-2n\ln x$

1) a) calculer les limites $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f_n(x)$

b) étudier les variations de f_n et donner le tableau de variations

2) montrer que $f_n(x)=0$ admet deux solutions u_n et v_n telles que $u_n<\sqrt{n}<v_n$

3) calculer $\lim\limits_{n\to +\infty} v_n$ puis montrer que $\lim\limits_{n\to +\infty}\dfrac{\ln(v_n)}{\ln(2n)}=\dfrac{1}{2}$

4) a) montrer que $(\forall n\geq 3)\quad u_n\geq 1$

b) vérifier que $f_{n+1}(u_n)=-\ln u_n$ en déduire que $(u_n)_n$ est convergente

c) montrer que $(\forall n\geq 3)\ u_n\leq e^{\frac{3}{2n}}$ en déduire la limite de $(u_n)_n$

Exercice 6

1) montrer que $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}\right) \quad \ln x \leq x-1$

2) soit n de $\mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. $x_1 ; x_2 ; \ldots\ldots ; x_n$ و $\alpha_1 ; \alpha_2 ; \ldots\ldots ; \alpha_n$ des réels de $\mathbb{R}^{*+}$

Tels que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$ on pose $y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$

a) Montrer que pour tout k de $\{1;2;\ldots;n\}$ on a : $\alpha_k \ln\left(\frac{x_k}{y}\right) \leq \frac{\alpha_k x_k}{y} - \alpha_k$

b) En déduire que : $\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k \ln(x_k) \leq \ln\left(\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k x_k\right)$

c) Montrer que : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \ln(x_k) \leq \ln\left(\frac{\sum_{k=1}^{k=n} x_k}{n}\right)$

d) Prouver que $\sqrt[x]{x_1 x_2 \ldots\ldots x_n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} x_k$

e) Montrer que $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

En déduire que $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots\ldots + \frac{x_n}{x_1} \geq n$ pour tous $x_1 ; x_2 ; \ldots\ldots ; x_n$ de $\mathbb{R}^{*+}$

Exercice 7

1) montrer que $\left(\forall x > 0\right) \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

2) on pose $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ pour tout entier naturel n non nul

a) calculer U_1 ; U_2

b) montrer que $\left(U_n\right)_n$ est convergente (on donne $\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

3) on pose $V_n = \prod_{k=1}^{k=n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ pour n de $\mathbb{N}^*$.

montrer que $\left(V_n\right)_n$ est convergente et déterminer sa limite

Exercice 8

Soit x de $]0,+\infty[$ on considère la fonction φ définie par :

$\varphi(t) = x^2(\ln(1+t) - t) - t^2(\ln(1+x) - x)$

1) montrer que φ vérifier les conditions de rool sur $[0,x]$

2) en déduire qu'il existe un réel c tel que $\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \frac{-1}{2(1+c)}$

3) déduire que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$

4) déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$