

Exercice (1)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $f(x) = x(\ln x)^2 - (x-1)^2$  ;  $x \neq 0$  و  $f(0) = -1$

- 1) a) montrer que  $f$  est continue sur  $]0, +\infty[$   
 b) étudier la dérivabilité de  $f$  à droite de 0
- 2) calculer les limites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  et donner une interprétation géométrique
- 3) a) montrer que  $(\forall x > 0) \ln x \leq x - 1$   
 b) calculer  $f'(x)$  ;  $f''(x)$  et vérifier que  $f'(1) = 0$   
 c) déduire le signe de  $f'(x)$  puis dresser le tableau de variation de  $f$
- 4) construire la courbe de la fonction  $f$

Exercice (2)

Partie (1) soit  $g$  la fonction définie par :  $g(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$

- 1) déterminer  $D_g$  et calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  ;  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} g(x)$
- 2) calculer  $g'(x)$  et donner le tableau de variation de  $g$
- 3) déduire le signe de  $g(x)$  ( remarquer que  $g(0) = 0$  )

Partie (2)

on considère la fonction  $f$  définie sur  $]-1, +\infty[$  par : 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)} & x \neq 0 ; x \neq -1 \\ f(0) = 1 & ; f(-1) = 0 \end{cases}$$

- 1) a) montrer  $f$  que au point 0 et à droite de -1  
 b) étudier la dérivabilité de  $f$  à droite de -1
- 2) a) montrer que  $(\forall x \geq 0) x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$   
 étudier la dérivabilité de  $f$  à droite de 0  
 b) soit  $x$  un réel de  $]-1, 0[$  et on considère la fonction  $\varphi$  définie sur  $]-1, 0[$  par :  

$$\varphi(t) = t^2(x - \ln(1+x)) - x^2(t - \ln(1+t))$$
 . Montrer que :  

$$(\exists c \in ]x, 0[) \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2(1+c)}$$
 puis étudier la dérivabilité de  $f$  à gauche de 0
- 3) montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et étudier la branche infinie de  $(C_f)$  au voisinage de  $+\infty$
- 4) a) montrer que :  $(\forall x \in ]-1, +\infty[ - \{0\}) ; f'(x) = \frac{-g(x)}{(1+x)(\ln(1+x))^2}$   
 b) dresser le tableau de variation de  $f$
- 5) étudier la position de  $(C_f)$  par rapport à  $(\Delta) y = x$  et construire la courbe  $(C_f)$

Exercice (3)

Soit  $n$  un entier de  $\mathbb{N}^*$ . On considère la fonction  $f_n$  définie par :  $f_n(x) = nx + \ln x$

- 1) a) calculer les limites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_n(x)$

## دالة لوغاريتم

- b) étudier la branche infinie de  $(C_f)$  au voisinage de  $+\infty$
- 2) étudier le sens de variation de  $f_n$  et construire la courbe  $(C_1)$
- 3) a) montrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  a une seule solution  $u_n$  et que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n < 1$   
 b) montrer que  $f_n(u_{n+1}) = -u_{n+1}$ , déduire la monotonie de la suite  $(u_n)_n$
- 4) a) montrer que  $(\forall x > 0) \quad x > \ln x$ , déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$   
 b) déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n$  et montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nu_n}{\ln n} = 1$

### Exercice (4)

Partie (1) soit  $g$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $g(x) = -\frac{1}{x+1} + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

- 1) calculer les limites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$
- 2) montrer que :  $g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$  et donner le tableau de variation de  $g$
- 3) déduire que  $(\forall x > 0) \quad g(x) > 0$

Partie (2)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$  ;  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$

- 1) a) montrer que  $f$  est continue à droite de  $0$   
 b) montrer que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  donner une interprétation géométrique du résultat

- 2) étudier la branche infinie de  $(C_f)$  au voisinage de  $+\infty$
- 3) calculer  $f'(x)$  et étudier le sens de variation de  $f$  puis donner le tableau de variation
- 4) construire la courbe  $(C_f)$

Partie (3) soit  $(U_n)_{n>0}$  une suite telle que  $U_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  et on pose  $V_n = \ln U_n$

- 1) a) vérifier que  $V_n = f(n)$  et déduire que  $(U_n)_n$  est croissante  
 b) montrer que  $(\forall x > 0) \quad \ln(1+x) < x$  ; déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad U_n < e$  puis calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$
- 2) on pose  $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{V_k}{k}$ . exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$  et déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\ln n}$

### Exercice (5)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\left]0, \frac{1}{e}\right[ \cup \left] \frac{1}{e}, \infty\right[$  par :  $f(x) = \frac{x}{1 + \ln x}$  ;  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$

$(C)$  la courbe de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 1) a) montrer que  $f$  est continue à droite de  $x_0 = 0$   
 b) étudier la dérivabilité de  $f$  à droite de  $x_0 = 0$

## دالة لوغاريتم

- 2) calculer les limites  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} f(x)$   
 $\lim_{x < \frac{1}{e}}$  et  $\lim_{x > \frac{1}{e}}$
- 3) a) calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$   
 b) étudier la branche infinie de  $(C_f)$  au voisinage de  $+\infty$
- 4) montrer que  $f'(x) = \frac{\ln x}{(1 + \ln x)^2}$  puis dresser le tableau de variation de  $f$
- 5) construire la courbe  $(C)$
- 6) soit  $n$  un entier tel que  $n \geq 2$ .
- a) montrer que l'équation  $f(x) = \sqrt{n}$  admet deux solutions  $u_n$  et  $v_n$  avec  $e^{-1} < u_n < 1 < v_n$
- b) (b1) montrer que  $(\forall n \geq 2) v_n \geq \sqrt{n}$  et calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$   
 (b2) montrer que  $(\forall x \geq 16) \sqrt{x} > 1 + \ln x$  et déduire que  $(\forall n \geq 16) v_n \leq n$   
 (b3) montrer que  $(\forall n \geq 2) \ln v_n = \frac{1}{2} \ln n + \ln(1 + \ln v_n)$  puis déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln v_n}{\ln n} = \frac{1}{2}$
- c) (c1) montrer que  $(u_n)_n$  est décroissante puis qu'elle est convergente  
 (c2) montrer que  $(\forall n \geq 2) u_n = e^{\frac{u_n}{\sqrt{n}} - 1}$  ; déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^{-1}$   
 (c3) démontrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}(u_n - e^{-1}) = e^{-2}$

## Exercice (7)

Soit  $n$  un entier de  $\mathbb{N}^*$ . On considère la fonction  $f_n$  définie par :  $f_n(x) = x - n + \frac{n}{2} \ln x$

- 1) calculer les limites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$  ;  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_n(x)$
- 2) calculer  $f'_n(x)$  et dresser le tableau de variation de  $f_n$
- 3) a) montrer que  $f_n(x) = 0$  admet une unique solution  $u_n$  et  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) 1 \leq u_n < e^2$   
 b) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) f_n(u_{n+1}) = 1 - \frac{1}{2} \ln u_{n+1}$  et déduire la monotonie de  $(u_n)_n$
- c) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ln u_n = 2 - \frac{2}{n} u_n$
- d) calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} u_n$  puis déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^2$
- 4) a) montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\exists d > 0) e^{\frac{2}{n} u_n} - 1 = \frac{2e^d}{n} u_n$   
 b) déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) 1 \leq \frac{e^{\frac{2}{n} u_n} - 1}{\frac{2}{n} u_n} \leq e^{\frac{2e^2}{n}}$  puis déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(e^2 - u_n)$