Exercices : *fonctions exponentielles*

PROF : ATMANI NAJIB 2BAC SM

TD :FONCTIONS EXPONENTIELLES

Exercice1 : Résoudre les équations
Et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

$1)\exp\left(\frac{x+5}{2x+3}\right)=\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)$ $2)\exp(2x+1)\leq\exp\left(\frac{6}{x}\right)$

Exercice2 : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1) $e^{1-x}\times e^{2x}=e$ 2) $\frac{e^{2-x}}{e^{1+2x}}=e^{x-1}$

3) $e^{2x}-5e^{x}+6=0$ 4) $e^{x^2}\cdot\left(e^{x}\right)^3=\left(e^{-x}\right)^5\cdot e^{-7}$

5) $e^{2x-3}-(e+1)e^{x-2}+1\prec 0$

Exercice3 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^2+3x+4}$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^5e^{-\sqrt{-x}}$

3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-1}{x}$ 4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x+1}-e}{x}$

Exercice4 : Déterminer les dérivées des fonctions suivantes : 1) $f(x)=e^{\sqrt{2x+1}}$

2) $g(x)=e^{-2x^2}-3e^{3x+1}$ 3) $h(x)=e^{\frac{x+1}{-x+3}}$

4) $f(x)=\left(e^{x}-4\right)\sqrt{e^{x}-1}$

Exercice5 : Déterminer les primitives des fonctions suivantes : 1) $f(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

2) $g(x)=\left(e^{x}\right)^2$ 3) $h(x)=\frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}$

Exercice6 : Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1) $I=\mathbb{R};\ f(x)=2e^{3x}-e^{-x}$

2) $I=]0;+\infty[;\ f(x)=\frac{e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^2}$

3) $I=\mathbb{R};\ f(x)=e^{x}\left(e^{x}-1\right)^3$

4) $I=[0;\pi];\ f(x)=\sin x e^{\cos x}$

5) $f(x)=\frac{e^{x}-1}{e^{x}-x}$ $I=]0;+\infty[$

Exercice7 : Considérons la fonction f définie par :
$f(x)=(x-1)e^{x}$

1)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2) Etudier les branches infinies de la courbe Cf au voisinage de $+\infty$
3) Etudier la concavité de la courbe Cf
4) Construire la courbe C_f.

Exercice8 : Considérons la fonction f définie par : $f(x)=x-1+\frac{3}{e^{x}+1}$

1)déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

2)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3)montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R});\ f(x)=x+2-\frac{3e^{x}}{e^{x}+1}$

4) Etudier les branches infinies de la courbe Cf
Et étudier la position de la courbe Cf avec les asymptotes obliques

Exercice9 : Considérons la fonction f définie par :
$f(x)=\left(e^{x}-4\right)\sqrt{e^{x}-1}$

1)déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

2)montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_*^+\right)\ \frac{f(x)}{x}=\frac{e^x-4}{\sqrt{e^x-1}}\cdot\frac{e^x-1}{x}$

3) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite de 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu

4) montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_*^+\right)\ f'(x)=\frac{3e^x\left(e^x-2\right)}{2\sqrt{e^x-1}}$

5)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

6) Etudier les branches infinies de la courbe C_f Au voisinage de +∞

7)calculer : $f(2\ln 2)$ et construire la courbe C_f.

Exercice10 :: Considérons la fonction f définie par : $f(x)=\sqrt{e^{-x}-e^{-2x}}$

1)déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f à droite de 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu

3)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4) construire la courbe C_f.

Exercice11 : Considérons la fonction f définie par : $f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

1)déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

2)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3) montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J que l'on déterminera

4) déterminer : $f^{-1}(x)\ \ \forall x\in J$

Exercice12 : Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=1-\ln\left(1+e^{-x}\right)$ et soit (C) la courbe De f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ avec $\left\|\vec{i}\right\|=2cm$

1)a)montrer que : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ et interpréter géométriquement le résultat

b) montrer que : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

2)a)vérifier que: $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f(x)=x+1-\ln\left(1+e^x\right)$

b) en déduire la droite (D) d'équation : $y=x+1$ est une asymptote oblique a la courbe Cf au voisinage de $-\infty$

c) étudier la position de la courbe Cf avec la droite (D)

3)a) montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f'(x)=\frac{1}{1+e^x}$

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

c) Etudier la concavité de Cf

d) montrer que la courbe Cf coupe l'axe des abscisses en un point à déterminer

4) Construire la courbe C_f dans le repére$\left(O;\vec{i}\ \vec{j}\right)$

5) a)montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J que l'on déterminera

b) déterminer : $f^{-1}(x)\ \ \forall x\in J$

Exercice13 :

Partie 1 : Considérons la fonction f définie sur ℝ+ par : $f(x)=(x+2)e^{\frac{-2}{x}}$ si $x>0$ et $f(0)=0$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f à droite de 0.

2) Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3) Déterminer la limite en +∞

4) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f puis dresser le tableau de variation de f.

5) a) Montrer que ($\forall t>0$) $0\prec e^{-t}+t-1\prec\frac{t^2}{2}$

b) En déduire que : ($\forall x>0$)

$$\frac{-4}{x}\prec f(x)-x\prec\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}$$

c) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe Cf au voisinage de $+\infty$

6) Construire la courbe C_f.

Partie 2 :

Considérons la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(x) = (x+2n)e^{\frac{-2}{x}} \text{ si } x > 0 \text{ et } f_n(0)=0$$

Où $n \in \mathbb{N}^*$

1) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f_n à droite de 0.

b) Déterminer la limite en $+\infty$

c) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f_n puis dresser le tableau de variation de f_n.

2) Montrer que l'équation $f_n(x) = \frac{2}{n}$ admet une solution unique α_n dans $]0, +\infty[$

3)a) Montrer que ($\forall x > 0$)

$$f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} \succ f_n(x) - \frac{2}{n}$$

b) En déduire la monotonie de $(\alpha_n)_n$

c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_n$ est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n)_n = 0$

Exercice14 : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1) $5^x = 15$ 2) $3^{2x} \geq 5^{1-x}$ 3) $7^{x+1} - 7^{-x} \prec 6$

Exercice15 : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1) $2^{x+1} = 8^x$ 2) $3^x = 12$ 3) $5\times 2^x + 2^{x+1} - 336 = 0$

4) $100^x + 40 = 14\times 10^x$

5) $2^{x-1} > 4^x$ 5) $(0,5)^{2x} \geq (0,5)^{x+1}$

Exercice16: Déterminer les primitives de la fonction suivante : $f(x) = 3^{x-2}$

Exercice17: Soit La fonction f définie par :

$f(x) = 4^x - 2^{x+1}$ 1)déterminer D_f

2) calculer les limites aux bornes de D_f

3)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4) Etudier les branches infinies de la courbe Cf

5) construire la courbe C_f dans un repére$(O;\vec{i}\ \vec{j})$

Exercice 18: Soit La fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$x \to x^x$, si $x \neq 0$ et $f(0)=0$

1)Etudier la continuité de la fonction f à droite de 0.

2)Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite de 0.

3)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4)Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe Cf au voisinage de $+\infty$.

5)Tracer la courbe Cf.

6)Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = x$

7)Soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_0 = \frac{1}{e}$

et ($\forall n \in \mathbb{N}$)($u_{n+1} = f(u_n)$).

a)Montrer que : ($\forall n \in \mathbb{N}$)($u_n \leq 1$)

b)Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$; puis en déduire qu'elle convergente.

c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$

Exercice 19 : Soit $n \in \mathbb{N}*$; considérons la fonction f_n définie sur [1, +∞[par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{(\ln x)^n}{x^2} \text{ si } x > 0 \text{ et } f_n(0)=0$$

et (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\mathcal{R}(O, \vec{i},\vec{j})$.

1. Donner le tableau de variation de f_1.

2. Déterminer l'équation de la tangente (T_1) à la courbe (C_1) en point d'abscisse 1.

3. Construire la courbe (C_1) et la tangente (T_1) dans le repère $\mathcal{R}(O, \vec{i},\vec{j})$.

4. Dresser le tableau de variation de la fonction f_n.

5. a) Etudier sur l'intervalle [1, +∞[le signe de : $f_2(x) - f_1(x)$

b) En déduire les positions relatives des deux courbes (C_1) et (C_2) ; puis construire (C_2)

6. Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ où u_n est la valeur maximale de la fonction f_n.

a) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}*)$: $u_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{2e}\right)^n$

b) Pour $x \in]1, +\infty[$; calculer $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$

c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}*)$ ($u_{n+1} = \frac{1}{2} f_n(e^{\frac{n+1}{2}})$)

d) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}*)$ ($u_n \leq \frac{1}{e}\frac{1}{2^n}$)

Et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice20 : Partie 1

1. En utilisant le T.A.F sur la fonction : $t \to e^{-t}$;

montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}*+)(\exists \theta \in \mathbb{R}*+)$ ($e^{\theta} = \frac{x}{1-e^{-x}}$)

2. En déduire que : $(\forall x > 0)$($1 - x \prec e^{-x}$) et que

$(\forall x > 0)$($1 + x \prec e^{x}$)

3. En déduire que : $(\forall x > 0)$($0 \prec \ln\left(\frac{xe^x}{e^x - 1}\right) \prec x$)

Partie 2

Considérons la fonction f définie sur [0, +∞[

Par : $f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1}$ Si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$

1) Etudier la continuité de la fonction f sur [0, +∞[.
2) Déterminer la limite de f quand x tend vers +∞ et étudier la branche infinie de la courbe C_f au voisinage de +∞.
3) a) Montrer que $(\forall x > 0)$

($\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \prec e^{-x} + x - 1 \prec \frac{x^2}{2}$)

b) Montrer que $(\forall x > 0)$ ($\frac{f(x)-1}{x} = \frac{e^{-x}+x-1}{x^2} \cdot f(x)$)

c) En déduire que f est dérivable à droite de 0 et donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.

4) a) Montrer que : $(\forall x > 0)$ ($f'(x) = \frac{e^x\left(e^x - x - 1\right)}{\left(e^x - 1\right)^2}$)

b) En déduire que f est strictement croissante sur [0, +∞[. Dresser le tableau de variation de f.
c) Construire la courbe C_f.
d) Montrer que f est une bijection de [0, +∞[Vers $J = f([0, +\infty[)$.

Partie 3 :Considérons la suite $(u_n)_n$ définie par :

$u_0 \in]0, +\infty[$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$($u_{n+1} = \ln\left(f\left(u_n\right)\right)$).

1) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est strictement positive,

2) Montrer que la suite $(u_n)_n$ strictement décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente.
3) a) Montrer que l'équation $ln(f(x)) = x$ admet 0 comme seule solution.

b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_n$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien