التمرين الأول

دراسة دالة لوغاريتم

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$

1) a) étudier la parité de f

b) calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, interpréter le résultat

2) a) montrer que $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f'(x)=\dfrac{e^x\left(1-e^{2x}\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$

b) étudier le sens de variation de f et donner le tableau de variation

c) déduire que $(\forall x\in\mathbb{R})\quad 0<f(x)\leq\dfrac{1}{2}$

3) construire la courbe (C_f)

4) montrer que l'équation $f(x)=x$ admet dans $I=\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ une seule solution α

5) montrer que $(\forall x\in I)\quad \left|f'(x)\right|\leq\dfrac{1}{2}$

6) on considère la suite $(U_n)_n$ définie par : $U_0=0$ et $U_{n+1}=f(U_n)$

a) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 0\leq U_n\leq\dfrac{1}{2}$

b) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad \left|U_{n+1}-\alpha\right|\leq\dfrac{1}{2}\left|U_n-\alpha\right|$

c) déduire que $(U_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite

التمرين الثاني

Partie (1)

1) résoudre l'équation $2e^{-2x}-2e^{-x}-1=0$ et déduire le signe de $2e^{-2x}-2e^{-x}-1$

2) soit la fonction f définie par : $f(x)=2e^{-x}-e^{-2x}-x$

a) calculer les limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)

3) étudier le sens de variation de f et donner sa table de variation

4) montrer que l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions distinctes α , β

5) construire la courbe (C_f) (on donne $\alpha\simeq-0,8$ et $\beta\simeq0,7$)

Partie (2)

Soit g la fonction définie sur $I=\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ par : $g(x)=2e^{-x}-e^{-2x}$

1) étudier le sens de variation de g , montrer que $g(I)\subset I$

2) montrer que $(\forall x\in I)\ \left|g'(x)\right|\leq\dfrac{1}{2}$

3) on considère la suite $(U_n)_n$ définie par : $U_0=\dfrac{1}{2}$ et $U_{n+1}=g(U_n)$

a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \le U_n \le \frac{1}{2}$

دراسة دالة لوغاريتم

b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \left|U_{n+1} - \beta\right| \le \frac{1}{2}\left|U_n - \beta\right|$

c) déduire que $(U_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite

التمرين الثالث

Soit n un entier naturel . on considère la fonction f_n définie par : $f_n(x) = -1 + n(2-x)e^x$

1) calculer les limites $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x)$

2) calculer $f_n^{/}(x)$ et étudier le sens de variation de f_n puis dresser le tableau de variation

3) montrer que l'équation (E_n) $f_n(x) = 0$ admet deux solutions $\alpha_n < 0$ et $\beta_n \in]1,2[$

4) a) montrer que $\left(f_{n+1}(t) = (2-t)e^t \right) \Leftrightarrow \left(t \text{ solution de } (E_n) \right)$

   b) montrer que $f_{n+1}(\beta_n) > 0$ t déduire que $(\beta_n)_n$ est croissante

   c) montrer que $(\beta_n)_n$ est convergente et que $\lim\limits_{n \to +\infty} \beta_n = 2$

5) a) montrer que $(\alpha_n)_n$ est décroissante

   b) montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = -\infty$

التمرين الرابع

Partie (1)

1) on pose $g(x) = e^x + x + 1$

a) montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α

b) déduire le sine de $g(x)$

2) on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x + 1}$

a) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)

b) calculer $f'(x)$

c) vérifier que $f(\alpha) = 1 + \alpha$ puis dresser le tableau de variation de f

d) tracer la courbe (C_f) dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\,cm$ (on prend $\alpha \simeq -1,25$)

partie (2)

soit un entier naturel .

1) a) montrer que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution α_n

   b) étudier la monotonie de la suite $(\alpha_n)_n$

   c) monter que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \alpha_n \ge n$; déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$

2) a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \alpha_n - n = ne^{-\alpha_n}$ et déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n - n$

   b) montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln \alpha_n - n = -\infty$

التمرين الخامس

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$

1) a) calculer les limites $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b) étudier les branches infinies

2) a) montrer que $(\forall t>0)\quad \ln(1+t)>\dfrac{t}{1+t}$

b) calculer $f'(x)$ et déduire que f est décroissante puis donner le tableau de variation

3) montrer que (C_f) coupe la droite $(\Delta)\ y=x$ en un point d'abscisse α appartenant à $]0,\ln 2[$

4) tracer la courbe (C_f)

5) on pose $I=]0,\ln 2[$. on considère la suite $(U_n)_n$ telle que $U_0=\dfrac{1}{2}$ et $U_{n+1}=f(U_n)$

a) montrer que $(\forall x\in I)\quad |f'(x)|\leq\dfrac{2}{3}(\forall x\in I)\quad |f'(x)|\leq\dfrac{2}{3}$

b) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad U_n\in I$

c) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\ |U_{n+1}-\alpha|\leq\dfrac{2}{3}|U_n-\alpha|$ déduire que $(U_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite

التمرين السادس

Soit n un entier tel que $n\geq 2$.

on considère la fonction f_n définie sur $[0,+\infty[$ par : $f_n(x)=1-x-e^{-nx}$

1) montrer que $\left(\forall x\in\left]1,+\infty\right[\right)\quad \ln x<x-1$; déduire $(\forall x>1)\quad e^{x-1}>x$

2) a) calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et étudier le sens de variation de f_n

b) montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet dans $]0,+\infty[$ une seule solution a_n et que $a_n<1$

3) a) étudier le sens de variation de la fonction $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

b) montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est croissante et qu'elle est convergente

4) montrer que $f_n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)<0$; déduire la limite de $(a_n)_n$

التمرين السابع

Soit n un entier non nul . on considère la fonction f_n définie par : $f_n(x)=e^x+\dfrac{x}{n}$

1) a) calculer les limites de f_n

b) étudier les variations de f_n et dresser le tableau de variation

2) montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une seule solution a_n et que $a_n\in\left]-\infty,0\right[$

3) a) montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est décroissante

b) montrer que $f_n\left(-\ln\sqrt{n}\right)>0$ et déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=-\infty$

c) déterminer le signe de $f_n(-\ln(n))$. déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{n}$

d) vérifier que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \dfrac{a_n}{\ln n}=-1+\dfrac{\ln(-a_n)}{\ln n}$ puis déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{\ln n}=-1$