FONCTIONS EXPONENTIELLES

I) LA FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE

1) Définition et propriétés :

La fonction ln est continue strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et $ln(]0, +\infty[) =]\lim_{x\to 0^+} \ln x ; \lim_{x\to+\infty} lnx [= \mathbb{R}$

Propriété et définition :
La fonction ln admet une fonction réciproque définie de$]-\infty, +\infty[$ vers $]0, +\infty[$ appelée fonction Exponentielle népérienne notée : exp

Propriétés :
1) $(\forall x \in \mathbb{R})(ln(exp(x)) = x)$
2) $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(exp(ln(x)) = x$
3) $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\forall y \in \mathbb{R})(ln(x) = y \Leftrightarrow x = exp(y))$
4) $exp(0) = 1$; $exp(1) = e$

Propriété : (monotonie) : La fonction exp est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Résultat :
1) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(exp(x) = exp(y) \Leftrightarrow x = y)$
2) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(exp(x) \le exp(y) \Leftrightarrow x \le y)$

Exemple1 : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

$1)\exp\left(\frac{x+5}{2x+3}\right)=\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)$ $\quad 2)\exp(2x+1)\le\exp\left(\frac{6}{x}\right)$

Solution :1) $ln(x-2)=0$

a)cette équation est définie ssi : $2x+3\neq 0$ et $x-1\neq 0$donc: $x\neq -\frac{3}{2}$ et $x\neq 1$donc : $D_E=\mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2};1\right\}$

b) Résoudre l'équation :

$$\exp\left(\frac{x+5}{2x+3}\right)=\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)\Leftrightarrow\frac{x+5}{2x+3}=\frac{1}{x-1}$$

$$(x+5)(x-1)=2x+3\Leftrightarrow x^2+2x-8=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times(-8)\times 1=4+32=36>0$$

$x_1=\frac{-2+6}{2\times 1}=\frac{4}{2}=2$ et $x_1=\frac{-2-6}{2\times 1}=\frac{-8}{2}=-4$

Donc : $S=\{-4;2\}$

$2)\exp(2x+1)\le\exp\left(\frac{6}{x}\right)$

a)cette inéquation est définie ssi : $x\neq 0$ donc : $D_I=\mathbb{R}^*$

$2)\exp(2x+1)\le\exp\left(\frac{6}{x}\right)\Leftrightarrow 2x+1\le\frac{6}{x}$

$\Leftrightarrow\frac{2x^2+x-6}{x}\le 0$

x	$-\infty$		-2		0		$3/2$		$+\infty$
$2x+x-6$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$q(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

$S=]-\infty,-2]\cup\left]0,\frac{3}{2}\right]$

2) l'écriture : e^x

Propriété :$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall r \in \mathbb{Q})(exp(rx) = (exp(x))^r)$

Preuve :
$ln((exp(x))^r) = rln(exp(x))= rx= ln(exp(rx))$

Résultat :
1) $(\forall r \in \mathbb{Q})(exp(r) = (exp(1))^r= e^r)$
2)On peut prolonger la propriété précédente à $\mathbb{R}$:
$(\forall x \in \mathbb{Q})(exp(x) = (exp(1))^x = e^x)$

Notation : *Pour tout x dans $\mathbb{R}$ on a :* $\exp(x)=e^x$

Propriété algébrique :
Pour tout x et y dans $\mathbb{R}$ on a :

1) $e^{x+y}=e^x\times e^y$ $\quad$ 2) $e^{-x}=\frac{1}{e^x}$ $\quad$ 3) $e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y}$

4) $e^{rx}=\left(e^x\right)^r$ $(r\in\mathbb{Q})$ $\quad$ 5) $\left(e^{\ln x}=x\right)$ $(\forall x\succ 0)$

6) $\left(\ln\left(e^x\right)=x\right)$ $(\forall x\in\mathbb{R})$
7) $(\forall y\succ 0)$ $(\forall x\in\mathbb{R})$ $\left(e^x=y\right)\Leftrightarrow(x=\ln y)$
8) $(\forall y\succ 0)$ $(\forall x\in\mathbb{R})$ $\left(e^x=e^y\right)\Leftrightarrow(x=y)$
9) $(\forall y\succ 0)$ $(\forall x\in\mathbb{R})$ $\left(e^x\ge e^y\right)\Leftrightarrow(x\ge y)$

Exemple : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1) $e^{1-x}\times e^{2x}=e$ 2) $\frac{e^{2-x}}{e^{1+2x}}=e^{x-1}$

3) $e^{2x}-5e^{x}+6=0$ 4) $e^{x^2}\cdot\left(e^{x}\right)^3=\left(e^{-x}\right)^5\cdot e^{-7}$

5) $e^{2x-3}-(e+1)e^{x-2}+1\prec 0$

Solution :1) $e^{1-x}\times e^{2x}=e\Leftrightarrow e^{2x+1-x}=e^{1}$

$\Leftrightarrow e^{x+1}=e^{1}\Leftrightarrow x+1=1\Leftrightarrow x=0$ donc : $S=\{0\}$

2) $\frac{e^{2-x}}{e^{1+2x}}=e^{x-1}\Leftrightarrow e^{(2-x)-(1+2x)}=e^{x-1}$

$\Leftrightarrow (2-x)-(1+2x)=x-1\Leftrightarrow -4x=-2\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Donc : $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

3) $e^{2x}-5e^{x}+6=0\Leftrightarrow \left(e^{x}\right)^2-5e^{x}+6=0$ on pose : $e^{x}=X$

Donc : $X^2-5X+6=0$ $\Delta=b^2-4ac=25-24=1>0$

$X_1=\frac{5+1}{2\times1}$ et $X_2=\frac{5-1}{2\times1}$ donc : $X_1=3$ et $X_2=2$

Donc : $e^{x_1}=3$ et $e^{x_2}=2$ donc : $x_1=\ln 3$ et $x_2=\ln 2$

Donc : $S=\{\ln 2,\ln 3\}$

4) cette équation est définie dans $\mathbb{R}$

$e^{x^2}\cdot\left(e^{x}\right)^3=\left(e^{-x}\right)^5\cdot e^{-7}\Leftrightarrow e^{x^2}\cdot e^{3x}=e^{-5x}\cdot e^{-7}$

$\Leftrightarrow e^{x^2+3x}=e^{-5x-7}\Leftrightarrow x^2+3x=-5x-7$

$\Leftrightarrow x^2+8x+7=0$

$\Delta=b^2-4ac=8^2-4\times7\times1=64-28=36>0$

$x_1=\frac{-8+6}{2\times1}=\frac{-2}{2}=-1$ et $x_2=\frac{-8-6}{2\times1}=\frac{-14}{2}=-7$

Donc : $S=\{-7;-1\}$

5) cette équation est définie dans $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow e^{-3}\left(e^{2x}-(e+1)e^{x+1}+e^{3}\right)\prec 0$

$\Leftrightarrow e^{2x}-(e+1)e^{x+1}+e^{3}\prec 0$ car $e^{-3}\succ 0$

$\Leftrightarrow \left(e^{x}\right)^2-\left(e^{2}+e\right)e^{x}+e^{3}\prec 0$

On pose : $e^{x}=t$ on aura : $t^2-\left(e^2+e\right)t+e^3\prec 0$

$t^2-\left(e^2+e\right)t+e^3=(t-e)\left(e^{x}-e^{2}\right)$

2) $e^{2x-3}-(e+1)e^{x-2}+1\prec 0\Leftrightarrow\left(e^{x}-e\right)\left(e^{x}-e^{2}\right)\prec 0$

$\Leftrightarrow\left(e^{x}-e^{1}\right)\left(e^{x}-e^{2}\right)\prec 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)\prec 0$

$\Leftrightarrow x\in\left]1;2\right[$ donc : $S=\left]1;2\right[$

Propriété : (limites usuelles)

1) $\lim_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$ 2) $\lim_{x\to-\infty}e^{x}=0$

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty$ 4) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{n}}=+\infty$

5) $\lim_{x\to-\infty}xe^{x}=0^{-}$ 6) $\lim_{x\to-\infty}x^{n}e^{x}=0$

7) $\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$ avec : $n\in\mathbb{N}^*$

Preuve : ces limites se déduisent des limites de La fonction ln

Montrons que : $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{n}}=+\infty$ avec : $n\in\mathbb{N}^*$?

On a : $\frac{e^{x}}{x^{n}}=\frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^{n}}{x^{n}}=\left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^{n}=\frac{1}{n^{n}}\left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^{n}$

on pose : $t=\frac{x}{n}$ $x\to+\infty\Leftrightarrow t\to+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{n}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{n^{n}}\left(\frac{e^{t}}{t}\right)^{n}$ on a $\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{t}}{t}=+\infty$

Donc : $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{n}}=+\infty$

Montrons que : $\lim_{x\to-\infty}x^{n}e^{x}=0$ avec : $n\in\mathbb{N}^*$?

on pose : $t=-x$ donc $x\to+\infty\Leftrightarrow t\to-\infty$

$\lim_{x\to-\infty}x^{n}e^{x}=\lim_{t\to+\infty}(-t)^{n}e^{-t}=\lim_{t\to+\infty}(-1)^{n}\frac{t^{n}}{e^{t}}=0$ car :

$\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{t}}{t^{n}}=+\infty$

Exercice1 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^2+3x+4}$ 2) $\lim_{x\to-\infty}x^{5}e^{-\sqrt{-x}}$

3) $\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-1}{x}$ 4) $\lim_{x\to0}\frac{e^{x+1}-e}{x}$

Solution : 1) $\dfrac{e^x}{x^2+3x+4}=\dfrac{e^x}{x^2\left(1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)}=\dfrac{e^x}{x^2}\dfrac{1}{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}}$

Et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}=1$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2+3x+4}=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^5e^{-\sqrt{-x}}$ on pose : $t=\sqrt{-x}$

donc $x\to-\infty \Leftrightarrow t\to+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}x^5e^{-\sqrt{-x}}=\lim\limits_{t\to+\infty}-t^{10}e^{-t}=\lim\limits_{t\to+\infty}-\dfrac{t^{10}}{e^t}=0$

3) on a : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\times\dfrac{\sin x}{x}=1\times1=1$

Car : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{\sin x}=1$ (on pose : $t=\sin x$)et $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

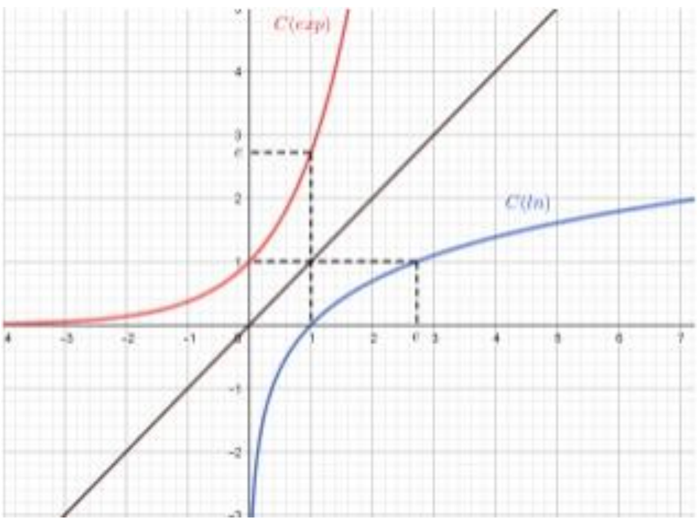
4)On pose : $f(x)=e^{x+1}$ donc : $f(0)=e^{0+1}=e^1=e$

Et : $f'(x)=(x+1)'e^{x+1}=1e^{x+1}=e^{x+1}$ et $f'(0)=e$

Donc : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x+1}-e}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=e$

3) Représentation de la fonction *exp*

La fonction *exp* est strictement monotone sur $\mathbb{R}$
Car l'*exp* est la fonction réciproque de la fonction *ln* qui est strictement monotone sur $]0,+\infty[$
Les courbes C_{ln} et C_{exp} sont symétriques par rapport à la première bissectrice (Δ) : $y=x$



Le Tableau de variation et L'exp :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$exp(x)$	0 ↗	1	e	↗ $+\infty$

4) Dérivation de la fonction *exp*

On sait que la fonction *exp* est la fonction réciproque de la fonction *ln* qui est dérivable sur $]0,+\infty[$.Et on sait que : $(\forall x\in]0,+\infty[)$ $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

Donc la fonction *exp* est dérivable sur $\mathbb{R}=ln(]0,+\infty[)$.
Soit $x\in\mathbb{R}$ on a :

$exp'(x)=(ln^{-1})'(x)=\dfrac{1}{\ln'(exp(x))}=exp(x)$

Car : $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$ avec f=ln et $ln^{-1}=exp$

Propriété : La fonction *exp* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x\in\mathbb{R})(exp'(x)=exp(x))$

Corolaire : Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction $exp(u(x))$ est dérivable sur I et $(\forall x\in I)(\exp(u(x)))'=u'(x)\ exp(u(x))$

Exemple : Déterminer les dérivées des fonctions suivantes : 1) $f(x)=e^{\sqrt{2x+1}}$

2) $g(x)=e^{-2x^2}-3e^{3x+1}$ 3) $h(x)=e^{\frac{x+1}{-x+3}}$

4) $f(x)=(e^x-4)\sqrt{e^x-1}$

Solutions : 1) $f(x)=e^{\sqrt{2x+1}}$

la fonction : $u_1:x\to\sqrt{2x+1}$ est dérivable sur

$\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ et $u_1'(x)=\dfrac{(2x+1)'}{2\sqrt{2x+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$

Donc la fonction f est dérivable sur

$\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ et $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}e^{\sqrt{2x+1}}$

2) $g(x)=e^{-2x^2}-3e^{3x+1}$ les fonctions:

$u_1 : x \to -2x^2$ et $u_2 : x \to 3x+1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :

$u_1'(x) = -4x$ et $u_2'(x) = 3$

Donc la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $g'(x) = -4xe^{-2x^2} - 9e^{3x+1}$

3) $h(x) = e^{\frac{x+1}{-x+3}}$

la fonction : $u : x \to \dfrac{x+1}{-x+3}$ est dérivable sur

$]3;+\infty[$ et $]-\infty;3[$ et $u'(x) = \dfrac{4}{(x-3)^2}$

Donc la fonction f est dérivable sur $]3;+\infty[$ et

$]-\infty;3[$ et $h'(x) = \dfrac{4}{(x-3)^2} e^{\frac{x+1}{-x+3}}$

4) $f(x) = (e^x - 4)\sqrt{e^x - 1}$

$f'(x) = \left((e^x-4)\sqrt{e^x-1}\right)' = \left((e^x-4)\right)'\sqrt{e^x-1} + (e^x-4)\left(\sqrt{e^x-1}\right)'$

$f'(x) = e^x\sqrt{e^x-1} + (e^x-4)\dfrac{(e^x-1)'}{2\sqrt{e^x-1}} = e^x\sqrt{e^x-1} + (e^x-4)\dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}$

$f'(x) = \dfrac{2e^x(e^x-1) + e^x(e^x-4)}{2\sqrt{e^x-1}} = \dfrac{2e^{2x} - 2e^x + e^{2x} - 4e^x}{2\sqrt{e^x-1}} = \dfrac{3e^{2x} - 6e^x}{2\sqrt{e^x-1}}$

5) Primitives et la fonction *exp*

Corolaire : Si u est une fonction dérivable alors une primitive de u'(x) . $e^{u(x)}$ est $e^{u(x)}$.

Exemple : Déterminer les primitives des fonctions suivantes : 1) $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ 3) $g(x) = (e^x)^2$

3) $h(x) = \dfrac{e^{\arctan x}}{1+x^2}$

Solutions : 1) $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ Si on pose : $u(x) = \sqrt{x}$ On a :

$f(x) = 2u'(x)e^{u(x)}$ si $x > 0$ donc

les primitives de f sont :

$F(x) = 2e^{u(x)} + \lambda = 2e^{\sqrt{x}} + \lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

2) $g(x) = (e^x)^2$ Si on pose : $u(x) = e^x$

On a : $g(x) = u'(x)u(x)$ donc les primitives de g

sont : $G(x) = \dfrac{1}{2}u^2(x) + \lambda = \dfrac{1}{2}(e^x)^2 + \lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

3) $h(x) = \dfrac{e^{\arctan x}}{1+x^2}$ Si on pose : $u(x) = \arctan x$

On a : $h(x) = u'(x)e^{u(x)}$ donc les primitives de h

sont : $H(x) = e^{\arctan x} + \lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

Exercice2 : Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1) $I = \mathbb{R};\ f(x) = 2e^{3x} - e^{-x}$

2) $I =]0;+\infty[;\ f(x) = \dfrac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$

3) $I = \mathbb{R};\ f(x) = e^x(e^x-1)^3$

4) $I = [0;\pi];\ f(x) = \sin x e^{\cos x}$

5) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} \qquad I =]0;+\infty[$

Solutions :1) $I = \mathbb{R};\ f(x) = 2e^{3x} - e^{-x}$

$f(x) = 2e^{3x} - e^{-x} = \dfrac{2}{3}(3x)'e^{3x} + (-x)'e^{-x}$

$F(x) = \dfrac{2}{3}e^{3x} + e^{-x}$ est une primitive de f sur I

2) $I =]0;+\infty[;\ f(x) = \dfrac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$

$f(x) = \dfrac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(e^{2x}-1)'}{(e^{2x}-1)^2}$

Donc : $F(x) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{e^{2x}-1}$ est une primitive de f sur I

3) $I = \mathbb{R};\ f(x) = e^x(e^x-1)^3$

$f(x)=e^x\left(e^x-1\right)^3=\left(e^x-1\right)'\left(e^x-1\right)^3$

donc : $F(x)=\frac{1}{3+1}\left(e^x-1\right)^{3+1}=\frac{1}{4}\left(e^x-1\right)^4$ est une primitive de f sur I

4) $I=[0;\pi]$; $f(x)=\sin xe^{\cos x}$

$f(x)=\sin xe^{\cos x}=-(\cos x)'e^{\cos x}$

donc : $F(x)=e^{\cos x}$ est une primitive de f sur I

5) $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}$ $\quad I=]0;+\infty[$

$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}=\frac{\left(e^x-x\right)'}{e^x-x}$ donc : $F(x)=\ln\left|e^x-x\right|$ est une primitive de f sur I

6) Etudes des fonctions qui contiennent *exp*

Exemple1: Considérons la fonction f définie par :

$f(x)=(x-1)e^x$

1)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

2) Etudier les branches infinies de la courbe Cf au voisinage de +∞

3) Etudier la concavité de la courbe Cf

4) Construire la courbe C_f.

Solution : 1) $D_f=\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x-e^x=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)e^x=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

Car : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0^+$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$

Donc : $y=0$ est une asymptote a (C) au voisinage de $-\infty$

$f'(x)=\left((x-1)e^x\right)'=(x-1)'e^x+(x-1)\left(e^x\right)'$

$f'(x)=1e^x+(x-1)e^x=e^x+xe^x-e^x=xe^x$

Le signe de : $f'(x)$ est celui de x

Tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-1	↗	$+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x-1)e^x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}e^x$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ donc :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}e^x=1\times(+\infty)=+\infty$

Donc : la courbe Cf admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées au voisinage de +∞

3) Etudie de la concavité de la courbe Cf :

$f''(x)=\left(xe^x\right)'=(x)'e^x+x\left(e^x\right)'=e^x(1+x)$

Le signe de : $f''(x)$ est celui de : $x+1$

$x+1=0\Leftrightarrow x=-1$

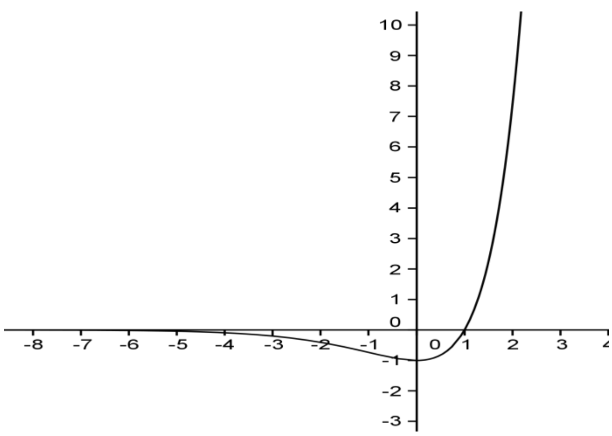
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	

Donc :

(C_f) est convexe sur $[-1;+\infty[$

(C_f) est concave sur $]-\infty;-1]$ et $A\left(-1,-2e^{-1}\right)$ est un point d'inflexion de (C_f)

4)



Exemple2: Considérons la fonction f définie par : $f(x) = x - 1 + \dfrac{3}{e^x + 1}$

1)déterminer D_f et calculer les limites aux

bornes de D_f

2)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3)montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R});\ f(x) = x + 2 - \dfrac{3e^x}{e^x + 1}$

4) Etudier les branches infinies de la courbe Cf
Et étudier la position de la courbe Cf avec les asymptotes obliques

Solutions :

1) $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / e^x + 1 \neq 0\right\}$

$e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = -1$ pas de solutions car $e^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

Donc : $D_f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 + \dfrac{3}{e^x + 1} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{e^x + 1} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x - 1 + \dfrac{3}{e^x + 1} = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} x - 1 = -\infty$

Et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{e^x + 1} = 3$

2) $f'(x) = \left(x - 1 + \dfrac{3}{e^x + 1}\right)'' = 1 - 3\dfrac{\left(e^x + 1\right)'}{\left(e^x + 1\right)^2} = 1 - 3\dfrac{e^x}{\left(e^x + 1\right)^2}$

$$f'(x) = \frac{\left(e^x + 1\right)^2 - 3e^x}{\left(e^x + 1\right)^2} = \frac{\left(e^x\right)^2 + 2e^x + 1 - 3e^x}{\left(e^x + 1\right)^2} = \frac{\left(e^x\right)^2 - e^x + 1}{\left(e^x + 1\right)^2}$$

Le signe de : $f'(x)$ est celui de : $\left(e^x\right)^2 - e^x + 1$

On pose : $e^x = X$ donc on a : $X^2 - X + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0$

Donc : $X^2 - X + 1 \succ 0$ (signe de a)

Donc : $\left(e^x\right)^2 - e^x + 1 > 0$ par suite: $f'(x) > 0$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

3)montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R});\ f(x) = x + 2 - \dfrac{3e^x}{e^x + 1}$

$$f(x) = x - 1 + \frac{3}{e^x + 1} = x + 2 - 3 + \frac{3}{e^x + 1}$$

$$f(x) = x + 2 + \frac{-3\left(e^x + 1\right) + 3}{e^x + 1} = x + 2 + \frac{-3e^x - 3 + 3}{e^x + 1}$$

$$f(x) = x + 2 - \frac{3e^x}{e^x + 1}$$

4) Etude des branches infinies ?

a)On a $f(x) = x - 1 + \dfrac{3}{e^x + 1}$ donc $f(x) - (x - 1) = \dfrac{3}{e^x + 1}$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x - 1) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{e^x + 1} = 0$

Par suite :la droite d'équation $(\Delta)\ y = x - 1$ est une asymptote oblique a la courbe Cf au voisinage de +∞ et on a aussi : $f(x) - (x - 1) = \dfrac{3}{e^x + 1} > 0$

Donc :la courbe Cf est au-dessus de la droite d'équation $(\Delta)\ y = x - 1$

b) On a $f(x) = x + 2 - \dfrac{3e^x}{e^x + 1}$ donc $f(x) - (x + 2) = -\dfrac{3e^x}{e^x + 1}$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (x + 2) = \lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{3e^x}{e^x + 1} = 0$

Par suite :la droite d'équation $(D)\ y = x + 2$ est une asymptote oblique a la courbe Cf au voisinage de $-\infty$ et on a aussi : $f(x) - (x + 2) = -\dfrac{3e^x}{e^x + 1} < 0$

Donc :la courbe Cf est au-dessous de la droite d'équation $(D)\ y = x + 2$

Exemple3: Considérons la fonction f définie par : $f(x) = \left(e^x - 4\right)\sqrt{e^x - 1}$

1)déterminer D_f et calculer les limites aux

bornes de D_f

2)montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_*^+\right)\ \dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{e^x-4}{\sqrt{e^x-1}}\cdot\dfrac{e^x-1}{x}$

3) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite de 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu

4) montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_*^+\right)\ f'(x)=\dfrac{3e^x\left(e^x-2\right)}{2\sqrt{e^x-1}}$

5)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

6) Etudier les branches infinies de la courbe C_f Au voisinage de +∞

7)calculer : $f(2\ln 2)$ et construire la courbe C_f.

Solutions : 1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,e^x-1\geq 0\right\}$

$e^x-1\geq 0\Leftrightarrow e^x\geq 1\Leftrightarrow x\geq\ln 1\Leftrightarrow x\geq 0$

Donc : $D_f=\mathbb{R}^+$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-4\right)\sqrt{e^x-1}=+\infty$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x-4=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{e^x-1}=+\infty$

2) $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\left(e^x-4\right)\sqrt{e^x-1}}{x}=\dfrac{\left(e^x-4\right)\left(\sqrt{e^x-1}\right)^2}{x\sqrt{e^x-1}}$

$\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\left(e^x-4\right)\left(e^x-1\right)}{x\sqrt{e^x-1}}=\dfrac{e^x-4}{\sqrt{e^x-1}}\cdot\dfrac{e^x-1}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-4}{\sqrt{e^x-1}}\cdot\dfrac{e^x-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-4}{\sqrt{e^x-1}}\cdot\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-1}{x}$ puisque : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

Et $\lim\limits_{x\to0^+} e^x-4=-3$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{e^x-1}=0^+$

Donc : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\infty$

Donc la fonction f n'est pas dérivable à droite de 0

Interprétation géométriquement :

la courbe Cf admet une demie tangente vertical adroite du point $O(0;0)$ dirigé vers le bas

car : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\infty\quad(+)\times(-)=(-)$

4) montrons que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_*^+\right)\ f'(x)=\dfrac{3e^x\left(e^x-2\right)}{2\sqrt{e^x-1}}$?

$f'(x)=\left(\left(e^x-4\right)\sqrt{e^x-1}\right)'=\left(e^x-4\right)'\sqrt{e^x-1}+\left(e^x-4\right)\left(\sqrt{e^x-1}\right)'$

$f'(x)=e^x\sqrt{e^x-1}+\left(e^x-4\right)\dfrac{\left(e^x-1\right)'}{2\sqrt{e^x-1}}=e^x\sqrt{e^x-1}+\dfrac{e^x\left(e^x-4\right)}{2\sqrt{e^x-1}}$

$f'(x)=\dfrac{2e^x\left(\sqrt{e^x-1}\right)^2+e^x\left(e^x-4\right)}{2\sqrt{e^x-1}}=\dfrac{2e^x\left(e^x-1\right)+e^x\left(e^x-4\right)}{2\sqrt{e^x-1}}$

$f'(x)=\dfrac{2e^{2x}-2e^x+e^{2x}-4e^x}{2\sqrt{e^x-1}}=\dfrac{3e^{2x}-6e^x}{2\sqrt{e^x-1}}=\dfrac{3e^x\left(e^x-2\right)}{2\sqrt{e^x-1}}$

5)le signe de : $f'(x)$ est celui de e^x-2

car $\dfrac{3e^x}{2\sqrt{e^x-1}}>0\ \left(\forall x\in\mathbb{R}_*^+\right)$

$e^x-2>0\Leftrightarrow e^x>2\Leftrightarrow x>\ln 2$

$f(\ln 2)=\left(e^{\ln 2}-4\right)\sqrt{e^{\ln 2}-1}=(2-4)\sqrt{2-1}=-2$

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

6) Etude des branches infinies de la courbe C_f Au voisinage de +∞ ?

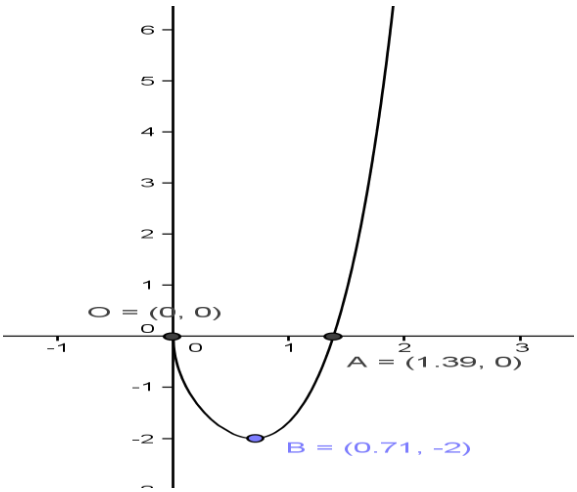
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{4}{x}\right)\sqrt{e^x-1}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{e^x-1}=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ Donc : la courbe Cf admet

une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées au voisinage de +∞

$f(2\ln 2)=\left(e^{2\ln 2}-4\right)\sqrt{e^{2\ln 2}-1}=\left(e^{\ln 4}-4\right)\sqrt{e^{\ln 4}-1}=(4-4)\sqrt{4-1}=0$



Exercice3 : Considérons la fonction f définie par : $f(x)=\sqrt{e^{-x}-e^{-2x}}$

1)déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f à droite de 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu

3)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4) construire la courbe C_f.

Solutions : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/e^{-x}-e^{-2x}\geq 0\}$

$e^{-x}-e^{-2x}\geq 0\Leftrightarrow e^{-x}\geq e^{-2x}\Leftrightarrow -x\geq -2x\Leftrightarrow x\geq 0$

Donc : $D_f=[0;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{e^{-x}-e^{-2x}}=0$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x}=0$

2) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{e^{-x}-e^{-2x}}=0=f(0)$

Donc f est continue à droite de 0

b)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{e^{-x}-e^{-2x}}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{e^{-x}\left(1-e^{-x}\right)}{x^2}}$$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{e^{-x}}{x}\times\frac{e^{-x}-1}{-x}}$ on a : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{-x}}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{-x}-1}{-x}=1$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$

Donc la fonction f n'est pas dérivable à droite de 0

Interprétation géométriquement :

la courbe Cf admet une demie tangente vertical adroite du point $O(0;0)$ dirigé vers le haut

car : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$ $\quad(+)\times(+)=(+)$

3)Etude des variations de f :

$$f'(x)=\left(\sqrt{e^{-x}-e^{-2x}}\right)'=\frac{\left(e^{-x}-e^{-2x}\right)'}{2\sqrt{e^{-x}-e^{-2x}}^{2}}$$

$$f'(x)=\frac{-e^{-x}+2e^{-2x}}{2\sqrt{e^{-x}-e^{-2x}}^{2}}=\frac{e^{-x}\left(2e^{-x}-1\right)}{2\sqrt{e^{-x}-e^{-2x}}^{2}}$$

le signe de : $f'(x)$ est celui de $2e^{-x}-1$

car $\frac{e^{-x}}{2\sqrt{e^{-x}-e^{-2x}}^{2}}>0\ \left(\forall x\in\mathbb{R}_*^+\right)$

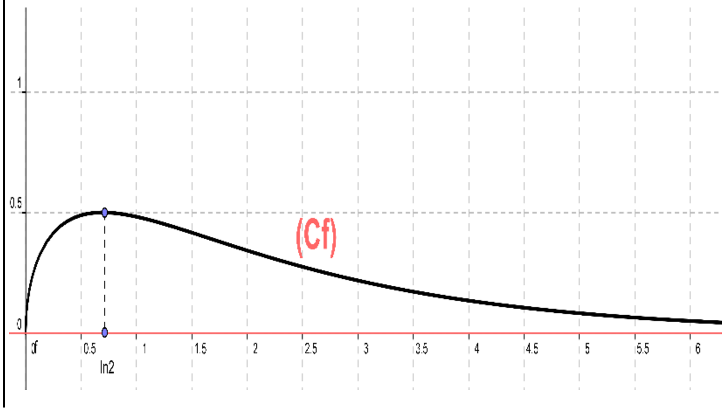
on a : $2e^{-x}-1=\frac{1}{e^{x}}\left(2-e^{x}\right)$

$2-e^{x}>0\Leftrightarrow e^{x}\prec 2\Leftrightarrow x\prec\ln 2$

$$f(\ln 2)=\sqrt{e^{-\ln 2}-e^{-2\ln 2}}=\sqrt{\frac{1}{e^{\ln 2}}-\frac{1}{e^{2\ln 2}}}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$1/2$	$\searrow$	0

4) la courbe C_f :



Exercice4 : Considérons la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

1)déterminer D_f et calculer les limites aux

bornes de D_f

2)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3) montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J que l'on déterminera

4) déterminer : $f^{-1}(x)\quad \forall x \in J$

Solutions : $f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/1-e^{2x}>0\right\}$$

$$1-e^{2x}>0 \Leftrightarrow 1>e^{2x} \Leftrightarrow e^0>e^{2x} \Leftrightarrow 0>2x \Leftrightarrow x<0$$

Donc : $D_f=\left]-\infty,0\right[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}=\frac{0}{\sqrt{1-0}}=0$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}=\lim_{x\to0^-}\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}\left(\frac{1}{e^{2x}}-1\right)}}=+\infty$$

Car : $\lim_{x\to0^-}\sqrt{e^{2x}\left(\frac{1}{e^{2x}}-1\right)}=0^+$

2) $f'(x)=\left(\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\right)'=\frac{\left(e^x\right)'\sqrt{1-e^{2x}}-e^x\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)'}{\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)^2}$

$$f'(x)=\frac{e^x\sqrt{1-e^{2x}}-e^x\frac{\left(1-e^{2x}\right)'}{2\sqrt{1-e^{2x}}}}{\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)^2}=\frac{\frac{2e^x\left(1-e^{2x}\right)+2e^xe^{2x}}{2\sqrt{1-e^{2x}}}}{1-e^{2x}}$$

$$f'(x)=\frac{2e^x-2e^{3x}+2e^{3x}}{2\sqrt{1-e^{2x}}\left(1-e^{2x}\right)}=\frac{2e^x}{2\sqrt{1-e^{2x}}\left(1-e^{2x}\right)}>0$$

$\forall x\in\left]-\infty,0\right[$

x	$-\infty$ $\qquad$ 0
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

3) on a f est une fonction continue et strictement croissante sur $I=\left]-\infty,0\right[$ donc f admet une fonction réciproque f^{-1}définie sur l' intervalle

$$J=f(I)=f\left(\left]-\infty,0\right[\right)=\left]0;+\infty\right[$$

$$\begin{cases} f(y)=x \\ y\in I\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ x\in J\end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{e^y}{\sqrt{1-e^{2y}}}=x \\ y\in\left]-\infty,0\right[\end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{e^y}{\sqrt{1-e^{2y}}}\right)^2=x^2 \Leftrightarrow \frac{e^{2y}}{1-e^{2y}}=x^2$$

$$e^{2y}=x^2\left(1-e^{2y}\right) \Leftrightarrow e^{2y}=x^2-x^2e^{2y} \Leftrightarrow e^{2y}+x^2e^{2y}=x^2$$

$$e^{2y}\left(1+x^2\right)=x^2 \Leftrightarrow e^{2y}=\frac{x^2}{1+x^2} \Leftrightarrow 2y=\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) \Leftrightarrow y=\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow y=\ln\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}$$

Donc: $f^{-1}(x)=\ln\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}\quad \forall x\in\left]0;+\infty\right[$

Exercice5 : Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=1-\ln\left(1+e^{-x}\right)$ et soit (C) la courbe

De f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ avec

$\left\|\vec{i}\right\|=2cm$

1)a)montrer que : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ et interpréter géométriquement le résultat

b) montrer que : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

2)a)vérifier que: $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f(x)=x+1-\ln\left(1+e^x\right)$

b) en déduire la droite (D) d'équation : $y = x+1$ est une asymptote oblique a la courbe Cf au voisinage de $-\infty$

c) étudier la position de la courbe Cf avec la droite (D)

3)a) montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = \frac{1}{1+e^x}$

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

c) Etudier la concavité de Cf

d) montrer que la courbe Cf coupe l'axe des abscisses en un point à déterminer

4) Construire la courbe C_f dans le repére $(O;\vec{i}\ \vec{j})$

5) a)montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J que l'on déterminera

b) déterminer : $f^{-1}(x)$ $\forall x \in J$

Solutions : $f(x) = 1-\ln\left(1+e^{-x}\right)$

1)a)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 1-\ln\left(1+e^{-x}\right) = \lim_{x\to+\infty} 1-\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right) = 1$$

Car $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

Interprétation géométriquement :

$y = 1$ est une asymptote a (C) au voisinage de $+\infty$

1)b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 1-\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right) = -\infty$

Car: $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$

2)a)Montrons que: $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) = x+1-\ln\left(1+e^x\right)$?

$$f(x) = 1-\ln\left(1+e^{-x}\right) = 1-\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right) = 1-\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)$$

$$f(x) = 1-\ln\left(e^x+1\right)+\ln\left(e^x\right) = 1-\ln\left(e^x+1\right)+x$$

Donc: $f(x) = x+1-\ln\left(e^x+1\right)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

2)b)on a : $f(x) = x+1-\ln\left(e^x+1\right)$

Donc : $f(x)-(x+1) = -\ln\left(e^x+1\right)$

Donc: $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(x+1) = \lim_{x\to-\infty} -\ln\left(e^x+1\right) = 0$ car: $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

Par suite :la droite d'équation $(D): y = x+1$ est une asymptote oblique à la courbe Cf au voisinage de $-\infty$

2)c) $f(x)-(x+1) = -\ln\left(e^x+1\right)$

On a : $e^x > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ donc : $e^x+1 > 1$

Donc: $\ln\left(e^x+1\right) > \ln 1$ Donc: $\ln\left(e^x+1\right) > 0$

Donc: $-\ln\left(e^x+1\right) < 0$

Donc :la courbe Cf est au-dessous de la droite d'équation $(D): y = x+1$

3)a)montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{1+e^x}$?

$$f'(x) = \left(x+1-\ln\left(1+e^x\right)\right)' = 1-\frac{\left(1+e^x\right)'}{1+e^x} = 1-\frac{e^x}{1+e^x}$$

$$f'(x) = \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

3)b) *Tableau de variation :*

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow 1$

3)c) Etude de la concavité de Cf :

$$f''(x) = \left(\frac{1}{1+e^x}\right)' = -\frac{\left(1+e^x\right)'}{\left(1+e^x\right)^2} = -\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

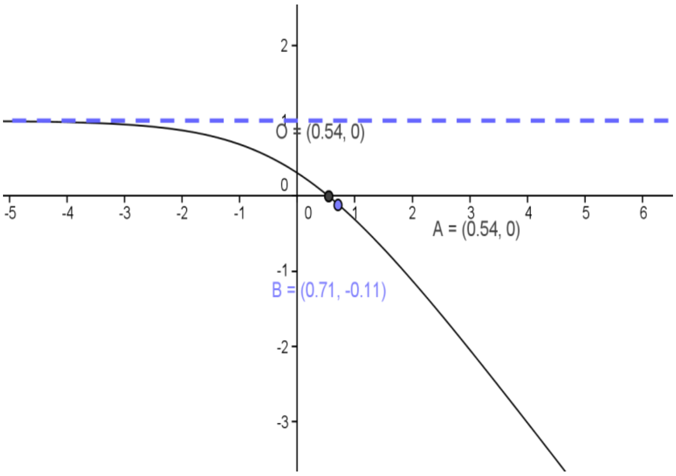
la courbe Cf est convexe dans $\mathbb{R}$,

3)d) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1-\ln\left(1+e^{-x}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(1+e^{-x}\right) = 1$

$\Leftrightarrow \ln\left(1+e^{-x}\right) = \ln e \Leftrightarrow e^{-x} = e-1 \Leftrightarrow -x = \ln(e-1)$

$\Leftrightarrow x = -\ln(e-1)$ Donc le point d'intersection de la courbe Cf avec l'axe des abscisses est :

$A\left(-\ln(e-1);0\right)$



5) a) on a f est une fonction continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l' intervalle

$J = f(I) = f(\mathbb{R}) =]-\infty;1[$

$$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1-\ln(1+e^{-y}) = x \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow 1-x = \ln(1+e^{-y}) \Leftrightarrow 1+e^{-y} = e^{1-x}$$

$$e^{-y} = e^{1-x}-1 \Leftrightarrow -y = \ln(e^{1-x}-1) \Leftrightarrow y = -\ln(e^{1-x}-1)$$

Donc: $\forall x \in]-\infty;1[\quad f^{-1}(x) = -\ln(e^{1-x}-1)$

Exercice 5BIS : Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3-\ln(1+e^{-x})$ et soit (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 2cm$

1) calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat

2)a)vérifier que: $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) = x+3-\ln(1+e^{x})$

b) en déduire la droite (D) d'équation : $y = x+3$ est une asymptote oblique a la courbe Cf au voisinage de $-\infty$

c) étudier la position de la courbe Cf avec la droite (D)

3)a) montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = \dfrac{1}{1+e^{x}}$

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

c) Etudier la concavité de Cf

d) montrer que la courbe Cf coupe l'axe des abscisses en un point à déterminer

4) Construire la courbe C_f dans le repére $(O;\vec{i}\ \vec{j})$

5) a)montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J que l'on déterminera

b) déterminer : $f^{-1}(x)\ \ \forall x \in J$

Exercice6 :

Partie 1 : Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}+$ par : $f(x) = (x+2)e^{\frac{-2}{x}}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f à droite de 0.

2) Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3) Déterminer la limite en $+\infty$

4) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f puis dresser le tableau de variation de f.

5) a) Montrer que $(\forall t > 0)$ $0 \prec e^{-t}+t-1 \prec \dfrac{t^2}{2}$

b) En déduire que : $(\forall x > 0)$

$$\frac{-4}{x} \prec f(x)-x \prec \frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}$$

c) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe Cf au voisinage de $+\infty$

6) Construire la courbe C_f.

Partie 2 :

Considérons la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(x) = (x+2n)e^{\frac{-2}{x}} \text{ si } x > 0 \text{ et } f_n(0) = 0$$

où $n \in \mathbb{N}^*$

1) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f_n à droite de 0.

b) Déterminer la limite en $+\infty$

c) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f_n puis dresser le tableau de variation de f_n .

2) Montrer que l'équation $f_n(x)=\frac{2}{n}$

admet une solution unique α_n dans]0, +∞[

3)a) Montrer que $(\forall x>0)$

$$f_{n+1}(x)-\frac{2}{n+1}\succ f_n(x)-\frac{2}{n}$$

b) En déduire la monotonie de $(\alpha_n)_n$

c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_n$ est convergente et

que $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n)_n=0$

II) LA FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE a.

1) Définition et résultats :

Propriété et définition : Soit a un réel strictement positif et différent de 1. La fonction $\log_a$ étant continue et strictement monotone sur]0, +∞[, elle admet donc une fonction réciproque de

$\mathbb{R}=\log_a$ (]0, +∞[) vers]0, +∞[.

Cette fonction réciproque s'appelle la fonction exponentielle de base a et se note ***exp$_a$***

Propriété : Soit $a>0$ et $a\neq 1$; on a :

$(\forall x\in\mathbb{R})\ \exp_a(x)=e^{x\ln a}$

Preuve : Posons : $y=\exp_a(x)$

on a donc $y>0$ et $x=\log_a y=\frac{\ln y}{\ln a}$

D'où : $\ln y=x\ln a$; finalement $y=e^{x\ln a}$

D'où la propriété.

Résultats immédiats : Soit $a>0$ et $a\neq 1$

fonction $\exp_a$ est définie sur $\mathbb{R}$

1) $\forall x\in\mathbb{R}\ \ \exp_a(x)\succ 0$

2) $\forall x\in\mathbb{R}\ \ \forall y\in\mathbb{R}_+^*\ \exp_a(x)=y\Leftrightarrow x=\log_a y$

3) $\forall x\in\mathbb{R}\ \log_a(\exp_a(x))=x$

4) $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\ \exp_a(\log_a(x))=x$

Propriété caractéristique :

Soit $a>0$ et $a\neq 1$; on a : $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}2$

$\exp_a(x+y)=\exp_a(x)+\exp_a(y)$

Conséquences :

Soit $a>0$ et $a\neq 1$ et x et y deux réels, on a :

1) $\exp_a(-x)=\frac{1}{\exp_a(x)}$ 2) $\exp_a(x-y)=\frac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)}$

3) $\exp_a(rx)=(\exp_a x)^r$

2) Une autre écriture de la fonction *exp$_a$*

Propriété : $\exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$(\forall x\in\mathbb{R})\left(\exp_a(x)\right)'=(\ln a)e^{x\ln a}=(\ln a)a^x$$

Exemple :

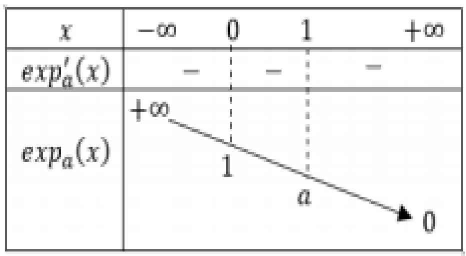
$$\left(\exp_6(x)\right)'=(\ln 6)e^{x\ln 6}=(\ln 6)6^x$$

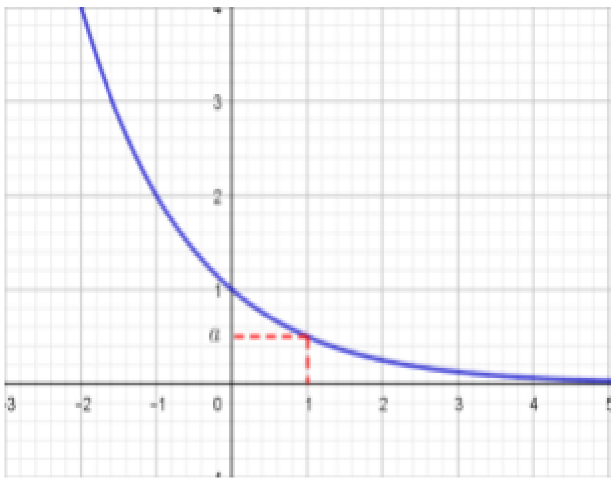
Monotonie et étude et représentation :

Si $0<a<1$:

On a $\ln(a)<0$ et par suite : $(\forall x\in\mathbb{R})(exp_a'(x)<0)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$



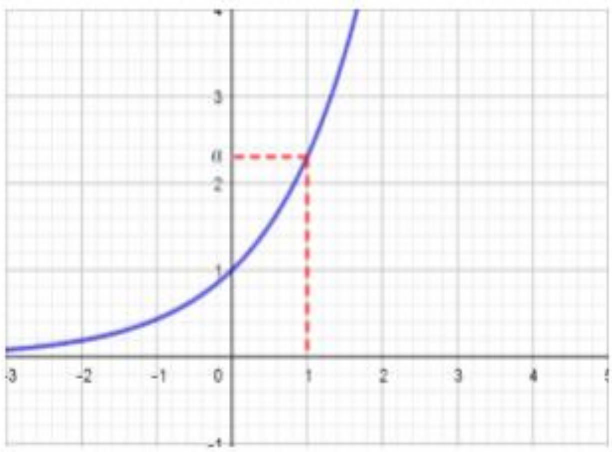


Si $0 < a < 1$:

On a $ln(a) > 0$ et par suite : $(\forall x \in \mathbb{R})(exp'_a(x) > 0)$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$exp'_a(x)$		$+$		$+$		$+$	
$exp_a(x)$	0		1		a		$+\infty$



3) Les puissances réelles.

Rappelle :

1) $(\forall x \in \mathbb{R}*)(x^0 = 1)$

2) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}*)$ $(x^n = x \times x \times ... \times x \ : n\ fois)$

3) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}*)$ $(x^{-n} = \dfrac{1}{x^n})$

4) $(\forall x \in \mathbb{R}*+)(\forall r \in \mathbb{Q})$ $(x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p})$ $(q \in \mathbb{N}*)$

Puissances réelle : La notation a^x

Soit a un réel strictement positif.

1) Si $a = 1$, on pose pour tout réel $x > 0$: $1^x = 1$

2) Si $a \neq 1$, on pose $a^x = e^{x\ln a}$

Propriétés :

$(\forall a \in \mathbb{R}*+)(\forall b \in \mathbb{R}*+)(\forall x \in \mathbb{R})$ $(\forall y \in \mathbb{R})$

1) $a^x \times a^y = a^{x+y}$ 2) $(a \times b)^x = a^x \times b^x$

3) $(a^x)^y = a^{x\times y}$ 4) $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$ 5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

6) $(a^x)' = a^x \times \ln a$

a) $x \to a^x$ est strictement croissante si $a \succ 1$

b) $x \to a^x$ est strictement décroissante si $0 \prec a \prec 1$

Exemples : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1) $5^x = 15$ 2) $3^{2x} \geq 5^{1-x}$ 3) $7^{x+1} - 7^{-x} \prec 6$

Solution : 1) $5^x = 15$

$5^x = 15 \Leftrightarrow e^{x\ln 5} = 15 \Leftrightarrow x\ln 5 = \ln 15 \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln 15}{\ln 5}$

Donc : $S = \left\{\dfrac{\ln 15}{\ln 5}\right\}$..

2) $3^{2x} \geq 5^{1-x} \Leftrightarrow \ln(3^{2x}) \geq \ln(5^{1-x})$

$\Leftrightarrow 2x\ln 3 \geq (1-x)\ln 5 \Leftrightarrow x(2\ln 3 + \ln 5) \geq \ln 5$

Donc : $S = \left[\dfrac{\ln 5}{2\ln 3 + \ln 5}; +\infty\right[$

3) $7^{x+1} - 7^{-x} \prec 6 \Leftrightarrow 7^{x+1} - \dfrac{1}{7^x} \prec 6$ on a $7^x \succ 0$

$7^{2x+1} - 1 \prec 6 \times 7^x \Leftrightarrow 7 \times (7^x)^2 - 6 \times 7^x - 1 \prec 0$

on pose : $t = 7^x$ $\Leftrightarrow 7t^2 - 6 \times t - 1 \prec 0$

on a : $7t^2 - 6 \times t - 1 = (t-1)(7t+1)$

$7^{x+1} - 7^{-x} \prec 6 \Leftrightarrow (7^x - 1)(7 \times 7^x + 1) \prec 0$

$\Leftrightarrow (7^x - 1)(7^{x+1} + 1) \prec 0 \Leftrightarrow 7^x - 1 \prec 0$ car $7^{x+1} \succ 0$

$\Leftrightarrow 7^x \prec 1 \Leftrightarrow 7^x \prec 7^0 \Leftrightarrow x \prec 0$ car $x \to 7^x$ est

strictement croissante $(7 \succ 1)$ donc : $S =]-\infty; 0[$

Exercice7 : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1) $2^{x+1} = 8^x$ 2) $3^x = 12$ 3) $5 \times 2^x + 2^{x+1} - 336 = 0$

4) $100^x + 40 = 14 \times 10^x$

5) $2^{x-1} > 4^x$ 5) $(0,5)^{2x} \geq (0,5)^{x+1}$

Solution : 1) $2^{x+1}=8^x \Leftrightarrow 2^{x+1}=\left(2^3\right)^x \Leftrightarrow 2^{x+1}=2^{3x}$

$x+1=3x \Leftrightarrow 1=2x \Leftrightarrow \frac{1}{2}=x$ donc : $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

2) $3^x=12 \Leftrightarrow x=\log_3 12$ donc : $S=\{\log_3 12\}$

3) $2^x-3\times 2^{x+1}-16=0 \Leftrightarrow 2^x-6\times 2^x-16=0$

On pose : $2^x=X$ donc : $X^2-6X-16=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2+4\times1\times16=100>0$

Donc : $X_1=8$ et $X_2=-2$

Donc : $2^x=8$ et $2^x=-2$ or $2^x \succ 0$ donc l'équation $2^x=-2$ n'a pas de solutions

$2^x=8 \Leftrightarrow x=\log_2 8 \Leftrightarrow x=\log_2 2^3 \Leftrightarrow x=2$ donc : $S=\{3\}$

4) $100^x+40=14\times10^x \Leftrightarrow 10^{2x}-14\times10^x+40=0$

$\Leftrightarrow \left(10^x\right)^2-14\times10^x+40=0$ on pose : $10^x=X$

On a alors : $X^2-14X+40=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-14)^2-4\times40=36>0$

$X_1=\frac{14+6}{2\times1}$ et $X_2=\frac{14-6}{2\times1}$ donc : $X_1=10$ et $X_2=4$

Donc : $10^{x_1}=10$ et $10^{x_2}=4$ donc **:** $x_1=1$ et

$x_2=\log_{10}4$ Donc : $S=\{1,\log_{10}4\}$

5) $2^{x-1}>4^x \Leftrightarrow 2^{x-1}>\left(2^2\right)^x \Leftrightarrow 2^{x-1}>2^{2x} \Leftrightarrow x-1>2x$

$\Leftrightarrow -1>x$ donc : $S=]-\infty,-1[$

6) $(0,5)^{2x}>(0,5)^{x+1} \Leftrightarrow 2x<x+1$ car $x\to(0,5)^x$ est strictement décroissante car : $0\prec 0,5\prec 1$

$(0,5)^{2x}>(0,5)^{x+1} \Leftrightarrow x<1$ donc : $S=]-\infty,1[$

Remarque : a est un réel strictement positif et $a\neq1$.Si u est une fonction dérivable alors une primitive de $u'(x)a^{u(x)}$ est $\frac{1}{\ln a}a^{u(x)}$

Exemple : Déterminer les primitives de la fonction suivante : $f(x)=3^{x-2}$

Solutions : 1) $f(x)=3^{x-2}$ Si on pose : $u(x)=x-2$

On a : $f(x)=u'(x)3^{u(x)}$ donc les primitives de f sont : $F(x)=\frac{1}{\ln 3}3^{u(x)}+\lambda=\frac{1}{\ln 3}3^{x-2}+\lambda \quad \lambda\in\mathbb{R}$

Exercice8: Soit La fonction f définie par :

$f(x)=4^x-2^{x+1}$

1)déterminer D_f

2) calculer les limites aux bornes de D_f

3)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4) Etudier les branches infinies de la courbe Cf

5) construire la courbe C_f dans un repére$\left(O;\vec{i}\ \vec{j}\right)$

Solutions : 1) $f(x)=e^{x\ln4}-e^{(x+1)\ln2}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}$

2)

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x\ln2}-e^{(x+1)\ln2}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x\ln2}\left(e^{x\ln2}-2\right)=+\infty$

Car : $\lim\limits_{X\to+\infty}e^X=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x\ln2}-e^{(x+1)\ln2}=0$ Car : $\lim\limits_{X\to-\infty}e^X=0$

3) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:

$\forall x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=2\ln2\times e^{x\ln2}\times\left(e^{x\ln2}-1\right)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{x\ln2}-1=0 \Leftrightarrow x=0$

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

4) Etude des branches infinies de la courbe Cf :

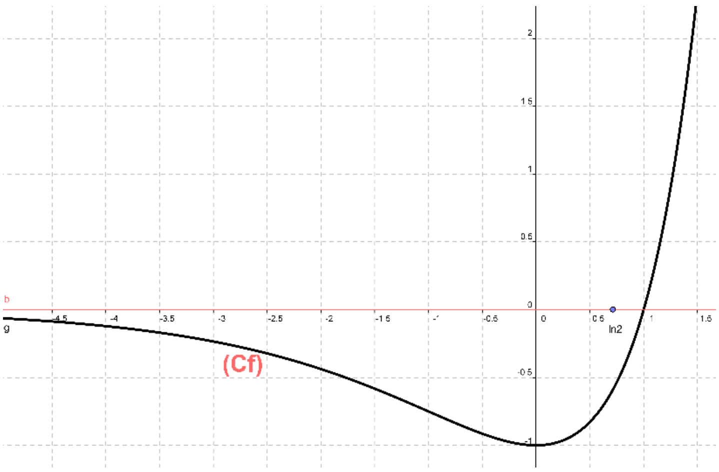
a)on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ donc : $y=0$

est une asymptote a (C)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x\ln 2}}{x}\left(e^{x\ln 2}-2\right)=+\infty$$

Car : $\lim_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X}=+\infty$ et $\lim_{X\to+\infty} e^X=+\infty$

Donc : la courbe Cf admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$



Exercice 9: Soit La fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$x \to x^x$, si $x \neq 0$ et $f(0)=0$

1)Etudier la continuité de la fonction f à droite de 0.
2)Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite de 0.
3)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
4)Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe Cf au voisinage de $+\infty$.
5)Tracer la courbe Cf.
6)Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = x$
7)Soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_0=\frac{1}{e}$

et $(\forall n \in \mathbb{N})$($u_{n+1}=f(u_n)$).

a)Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$($u_n \leq 1$)

b)Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$; puis en déduire qu'elle convergente.

c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$

Exercice 10 : Soit $n \in \mathbb{N}*$; considérons la fonction f_n définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$f_n(x)=\frac{1}{n!}\frac{(\ln x)^n}{x^2} \text{ si } x>0 \text{ et } f_n(0)=0$$

et (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Donner le tableau de variation de f_1.
2. Déterminer l'équation de la tangente (T_1) à la courbe (C_1) en point d'abscisse 1.
3. Construire la courbe (C_1) et la tangente (T_1) dans le repère $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f_n.
5. a) Etudier sur l'intervalle $[1, +\infty[$ le signe de :

$f_2(x)-f_1(x)$

b) En déduire les positions relatives des deux courbes (C_1) et (C_2) ; puis construire (C_2)

6. Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ où u_n est la valeur maximale de la fonction f_n.

a) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}*)$: $u_n=\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{2e}\right)^n$

b) Pour $x \in]1, +\infty[$; calculer $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$

c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}*)$ $\left(u_{n+1}=\frac{1}{2}f_n(e^{\frac{n+1}{2}})\right)$

d) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}*)$ $\left(u_n \leq \frac{1}{e}\frac{1}{2^n}\right)$

Et en déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$

Exercice11 : <u>Partie 1</u>

1. En utilisant le T.A.F sur la fonction : $t \to e^{-t}$;

montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}*+)(\exists \theta \in \mathbb{R}*+)$ $\left(e^{\theta}=\frac{x}{1-e^{-x}}\right)$

2. En déduire que : $(\forall x > 0)$($1-x \prec e^{-x}$) et que

$(\forall x > 0)$($1+x \prec e^{x}$)

3. En déduire que : $(\forall x > 0)(\ 0 \prec \ln\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right) \prec x\ )$

Partie 2

Considérons la fonction f définie sur $[0, +\infty[$

Par : $f(x) = \frac{xe^x}{e^x-1}$ Si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$

1) Etudier la continuité de la fonction f sur $[0, +\infty[$.
2) Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$ et étudier la branche infinie de la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.
3) a) Montrer que $(\forall x > 0)$

$(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \prec e^{-x} + x - 1 \prec \frac{x^2}{2})$

b) Montrer que $(\forall x > 0)$ $(\frac{f(x)-1}{x} = \frac{e^{-x}+x-1}{x^2} \cdot f(x))$

c) En déduire que f est dérivable à droite de 0 et donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.

4) a) Montrer que : $(\forall x > 0)$ $(\ f'(x) = \frac{e^x\left(e^x-x-1\right)}{\left(e^x-1\right)^2}\ )$

b) En déduire que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Dresser le tableau de variation de f.
c) Construire la courbe C_f.
d) Montrer que f est une bijection de $[0, +\infty[$ Vers $J = f([0, +\infty[)$.

Partie 3 :Considérons la suite $(u_n)_n$ définie par :

$u_0 \in]0, +\infty[$ et $(\forall n \in \mathbb{N})(\ u_{n+1} = \ln\left(f(u_n)\right))$.

1) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est strictement positive,

2) Montrer que la suite $(u_n)_n$ strictement décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente.
3) a) Montrer que l'équation $ln(f(x)) = x$ admet 0 comme seule solution.

b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_n$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien