

Exercices

Espaces vectoriels

Exercice1 : Justifier si les objets suivants sont des espaces vectoriels sur \mathbb{R}

(a) L'ensemble des fonctions réelles sur $[0, 1]$, continues, positives ou nulles, pour l'addition et le produit par un réel.

(b) L'ensemble des fonctions réelles sur \mathbb{R}

vérifiant $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ pour les mêmes opérations.

(c) L'ensemble des fonctions sur \mathbb{R} telles que : $f(3) = 7$.

Exercice2 : dans l'espace vectoriel $(V_2; +; \cdot)$

déterminer le scalaire α et le vecteur \vec{u} tel que :

$$(3\alpha^2 - 5\alpha + 2)\vec{u} = \vec{0}$$

Exercice3: on considère l'ensemble :

$$F = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = 2x\}$$

Montrer que F est un sous -espace vectoriel de

l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^2; +; \cdot)$

Exercice4 : on considère l'ensemble :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} / (a; b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Montrer que $(F; +; \cdot)$ est un espace vectoriel

sur \mathbb{R}

Exercice5 : on considère l'ensemble :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & 3a \end{pmatrix} / (a; b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Montrer que $(F; +; \cdot)$ est un espace vectoriel

sur \mathbb{R}

Exercice6 : dans espace vectoriel réel $(M_2(\mathbb{R}); +; \cdot)$

on considère les matrices :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ est-ce que la matrice :}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \text{ est une combinaison linéaire des}$$

matrices : M_1 et M_2 ?

Exercice7 : dans : $(\mathbb{R}^2; +; \cdot)$ on considère les

Vecteurs : $\vec{x}_1 = (1; -2)$ et $\vec{x}_2 = (5; 1)$ et $\vec{x}_3 = (-7; 2)$

Est-ce que le vecteur : \vec{x}_3 est une combinaison

linéaire des vecteurs : \vec{x}_1 et \vec{x}_2 ?

Exercice8 : dans $(\mathbb{R}_n[X]; +; \cdot)$ l'espace

vectoriel des polynômes de degrés inférieur a 2

on considère les polynômes : $P_1(x) = x^2 - x$;

$$P_2(x) = 1 + x^2 + x \text{ et } P_3(x) = 8 - x^2$$

Est-ce que le polynôme : $P(x) = -2x^2 - 2x + 15$ est

une combinaison linéaire des polynômes :

$P_1(x)$ et $P_2(x)$ et $P_3(x)$?

Exercice9: Soit $E = F(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des

fonctions réelles. Soient f_0, f_1, f_2 et f_3 les fonctions définies par : $\forall x \in \mathbb{R} f_0(x) = 1, f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, f_3(x) = x^3$. Alors la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} f(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$$

Montrer que f est combinaison linéaire des fonctions f_0, f_1, f_2, f_3

Exercice10: dans espace vectoriel réel

$(M_2(\mathbb{R}); +; \cdot)$ On considère la famille :

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right) \text{ et on considère la}$$

$$\text{matrice : } M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$$

Montrer que la matrice M est engendré par la famille B

Exercice11: dans l'espace vectoriel réel

$(\mathbb{R}^2; +; \cdot)$ on considère les vecteurs :

$$\vec{x}_1 = (3; 2) \text{ et } \vec{x}_2 = (1; 5) \text{ et la famille } B = (\vec{x}_1; \vec{x}_2)$$

Montrer que la famille $B = (\vec{x}_1; \vec{x}_2)$ engendre

l'espace vectoriel réel \mathbb{R}^2

Exercice12: On munit \mathbb{R}^3 des opérations usuelles.

$$F_1 = \{(\lambda, \lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\},$$

$$F_2 = \{(\lambda - 3\mu, 2\mu, \lambda + \mu), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\} \text{ et}$$

$$F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + 3z = 0 \text{ et } 2x + 5y + z = 0\}$$

Montrer que F_1, F_2, F_3 et F_4 sont des sous-espaces de \mathbb{R}^3 et en fournir dans chaque cas une famille génératrice.

Exercice13: dans l'espace vectoriel réel

$(\mathbb{R}^3; +; \cdot)$ on considère la famille :

$$B = (\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \text{ tel que : } \vec{u} = (\cos a; \cos b; \cos c)$$

$$\vec{v} = (\sin a; \sin b; \sin c) \text{ et}$$

$$\vec{w} = (\sin(x+a); \sin(x+b); \sin(x+c))$$

Avec ; $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$

Montrer que la famille B est liée

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

