Exercices d'applications et sur les espaces vectoriels

PROF : ATMANI NAJIB 2ème BAC Sciences maths

Exercices AVEC SOLUTIONS
Espaces vectoriels

Exercice1 : Justifier si les objets suivants sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$

(a) L'ensemble des fonctions réelles sur [0, 1], continues, positives ou nulles, pour l'addition et le produit par un réel.

(b) L'ensemble des fonctions réelles sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ pour les mêmes opérations.

(c) L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ telles que : f (3) = 7.

Exercice2 : dans l'espace vectoriel $(V_2;+;.)$ déterminer le scalaire α et le vecteur $\vec{u}$ tel que :

$(3\alpha^2-5\alpha+2)\vec{u}=\vec{0}$

Solutions :on utilusant les Régles de calculs dans un espace vectoriel on a donc :

$(3\alpha^2-5\alpha+2)\vec{u}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}=\vec{0}$ ou $3\alpha^2-5\alpha+2=0$

$\Leftrightarrow \vec{u}=\vec{0}$ ou $\alpha=\frac{2}{3}$ ou $\alpha=1$

Donc l'ensembles des solutions est :

$$S=\left\{\left\{1;\frac{2}{3}\right\}\times V_2 \cup \left(\mathbb{R}\times\left\{\vec{0}\right\}\right)\right\}$$

Exercice3: on considére l'ensemble :

$F=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / y=2x\}$

Montrer que F est un sous -espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^2;+;.)$

Solution : a)on a $F\subset\mathbb{R}^2$

b)Et on a : $(0;0)\in F$ car : $0=2\times 0$ donc : $F\neq\varnothing$

c) soient $(x;y)$ et $(x';y')$ sont deux éléments de F donc : $y=2x$ et $y'=2x'$

et $(\lambda;\mu)\in\mathbb{R}^2$ montrons que : $\lambda(x;y)+\mu(x';y')\in F$?

$\lambda(x;y)+\mu(x';y')=(\lambda x;\lambda y)+(\mu x';\mu y')$

$\lambda(x;y)+\mu(x';y')=(\lambda x+\mu x';\lambda y+\mu y')$

$\lambda y+\mu y'=\lambda 2x+\mu 2x'=2(\lambda x+\mu x')$

Donc : $\lambda(x;y)+\mu(x';y')\in F$

Donc : F est un sous -espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^2;+;.)$

Exercice4 : on considére l'ensemble :

$$F=\left\{\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b\end{pmatrix} / (a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

Montrer que $(F;+;.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Solution : on sait que $(M_2(\mathbb{R});+;.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Il suffit de montrer que : F est un sous -espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R});+;.)$

a) on a : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0+0 & 0 \\ -0 & 0-0\end{pmatrix}\in F$ donc : $F\neq\varnothing$

c) soient $M_1=\begin{pmatrix} a_1+b_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1-b_1\end{pmatrix}$ et $M_2=\begin{pmatrix} a_2+b_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2-b_2\end{pmatrix}$

deux éléments de F et $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$ montrons que :

$\alpha M_1+\beta M_1\in F$?

$$\alpha M_1+\beta M_1=\alpha\begin{pmatrix} a_1+b_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1-b_1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} a_2+b_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2-b_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha(a_1+b_1) & \alpha b_1\\ -\alpha b_1 & \alpha(a_1-b_1)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta(a_2+b)_2 & \beta b_2\\ -\beta b_2 & \beta(a_2-b_2)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha(a_1+b_1)+\beta(a_2+b)_2 & \alpha b_1+\beta b_2\\ -(\alpha b_1+\beta b_2) & \alpha(a_1-b_1)+\beta(a_2-b_2)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(\alpha a_1+\beta a_2)+(\alpha b_1+\beta b_2) & \alpha b_1+\beta b_2\\ -(\alpha b_1+\beta b_2) & (\alpha a_1+\beta a_2)-(\alpha b_1+\beta b_2)\end{pmatrix}$$

On pose : $d=\alpha b_1+\beta b_2$ et $c=\alpha a_1+\beta a_2$

Donc : $\alpha M_1+\beta M_1=\begin{pmatrix}c+d & d\\ -d & c-d\end{pmatrix}\in F$

Donc : $(F;+;.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Exercice5 : on considére l'ensemble :

$F=\left\{\begin{pmatrix}a & -2b\\ b & 3a\end{pmatrix}/(a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$

Montrer que $(F;+;.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Solution : on sait que $(M_2(\mathbb{R});+;.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Il suffit de montrer que : F est un sous -espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R});+;.)$

a) on a : $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2\times 0\\ 0 & 3\times 0\end{pmatrix}\in F$ donc : $F\neq\varnothing$

c) soient $M_1=\begin{pmatrix}a & -2b\\ b & 3a\end{pmatrix}$ et $M_2=\begin{pmatrix}c & -2d\\ d & 3c\end{pmatrix}$

deux éléments de F et $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$ montrons que :

$\alpha M_1+\beta M_2\in F$?

$$\alpha M_1+\beta M_1=\alpha\begin{pmatrix}a & -2b\\ b & 3a\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}c & -2d\\ d & 3c\end{pmatrix}$$

$$\alpha M_1+\beta M_1=\begin{pmatrix}\alpha a & -2\alpha b\\ \alpha b & 3\alpha a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta c & -2\beta d\\ \beta d & 3\beta c\end{pmatrix}$$

$$\alpha M_1+\beta M_1=\begin{pmatrix}\alpha a+\beta c & -2(\alpha b+\beta d)\\ \alpha b+\beta d & 3(\alpha a+\beta c)\end{pmatrix}$$

On pose : $f=\alpha b+\beta d$ et $e=\alpha a+\beta c$

Donc : $\alpha M_1+\beta M_1=\begin{pmatrix}e & -2f\\ f & 3e\end{pmatrix}\in F$

Donc : $(F;+;.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Exercice6 : dans espace vectoriel réel $(M_2(\mathbb{R});+;.)$ o n considére les matrices :

$M_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ et $M_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}$

est-ce que la matrice :

$M=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 3 & 8\end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire des matrices : M_1 et M_2 ?

Solution : on cherche $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $M=\alpha M_1+\beta M_2$?

$$\begin{pmatrix}2 & 5\\ 3 & 8\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 5\\ 3 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ \alpha & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta & \beta\\ 0 & 4\beta\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 5\\ 3 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta & \alpha+\beta\\ \alpha & 4\beta\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=3\\ \beta=2\\ \alpha+\beta=5\\ 4\beta=8\end{cases}$$

On a donc : $M=3M_1+2M_2$

donc : M est une combinaison linéaire des matrices : M_1 et M_2

Exercice7 : dans : $(\mathbb{R}^2;+;.)$ on considére les Vecteurs : $\vec{x}_1=(1;-2)$ et $\vec{x}_2=(5;1)$ et $\vec{x}_3=(-7;2)$

Est-ce que le vecteur : $\vec{x}_3$ est une combinaison linéaire des vecteurs : $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$?

Solution : on cherche $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel

que : $\vec{x}_3=\alpha\vec{x}_1+\beta\vec{x}_2$?

$\vec{x}_3=\alpha\vec{x}_1+\beta\vec{x}_2 \Leftrightarrow (-7;2)=\alpha(1;-2)+\beta(5;1)$

$\Leftrightarrow (-7;2)=(\alpha;-2\alpha)+(5\beta;\beta)$

$\Leftrightarrow (-7;2)=(\alpha+5\beta;-2\alpha+\beta) \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+5\beta=-7\\-2\alpha+\beta=2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2\alpha+10\beta=-14\\-2\alpha+\beta=2\end{cases} \Rightarrow 11\beta=-12 \Rightarrow \beta=-\frac{12}{11}$ et $\alpha=\frac{-17}{11}$

On a donc : $\vec{x}_3=\frac{5}{11}\vec{x}_1-\frac{17}{11}\vec{x}_2$

donc : $\vec{x}_3$ est une combinaison linéaire des vecteurs : $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$

b) Dans le l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^3;+;.)$

(3, 3, 1) est combinaison linéaire des vecteurs (1, 1, 0) et (1, 1, 1) car on a l'égalité (3, 3, 1) = 2(1, 1, 0) + 1(1, 1, 1).

c) dans : $(\mathbb{R}^2;+;.)$: le vecteur $\vec{x}$ = (2,1) n'est pas colinéaire au vecteur $\vec{y}$ = (1,1) car s'il l'était, il existerait un réel λ tel que $\vec{x}$ = λ $\vec{y}$ ce qui équivaudrait à l'égalité (2, 1) = (λ,λ). faux

Exercice8 : dans $(\mathbb{R}_n[X];+;.)$ l' espace vectoriel des polynômes de degrés inferieur a 2 on considére les polynômes : $P_1(x)=x^2-x$;

$P_2(x)=1+x^2+x$ et $P_3(x)=8-x^2$

Est-ce que le polynôme : $P(x)=-2x^2-2x+15$ est une combinaison linéaire des polynômes : $P_1(x)$ et $P_2(x)$ et $P_3(x)$?

Solution : on peut remarquer que :

$P(x)=1\times P_1(x)-1\times P_2(x)+2\times P_3(x)$

donc : le polynôme : $P(x)$ est une combinaison linéaire des polynômes $P_1(x)$ et $P_2(x)$ et $P_3(x)$

Exercice9: Soit E = $F(\mathbb{R};\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles. Soient f_0, f_1, f_2 et f_3 les fonctions définies par :∀x ∈ $\mathbb{R}$ $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^3$ .Alors la fonction f définie par :
∀x ∈ $\mathbb{R}$ $f(x) = x^3- 2x^2- 7x - 4$
Montrer que f est combinaison linéaire des fonctions f_0, f_1, f_2, f_3

Solution : puisque l'on a l'égalité :
$f = f_3- 2f_2- 7f_1- 4f_0$
alors f est combinaison linéaire des fonctions :
f_0, f_1, f_2, f_3

Exercice10: dans espace vectoriel réel $(M_2(\mathbb{R});+;.)$ On considére la famille :

$B=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}\right)$ et on considére la matrice : $M=\begin{pmatrix}1&4\\10&-4\end{pmatrix}$

Montrer que la matrice M est engendré par la famille B

Solution : on cherche $(a;b;c)\in\mathbb{R}^2$ tel :

$M=a\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}$

On a donc : $\begin{pmatrix}a+2b&b+c\\2c&-a+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\10&-4\end{pmatrix}$

Donc : $M=3\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}$

donc : M est engendré par la famille B

Exercice11:dans l'espace vectoriel réel $(\mathbb{R}^2;+;.)$ on considére les vecteurs :

$\vec{x}_1=(3;2)$ et $\vec{x}_2=(1;5)$ et la familleB=($\vec{x}_1$; $\vec{x}_2$)

Montrer que la famille B=($\vec{x}_1$; $\vec{x}_2$) engendre l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^2$

Solution : Montrrons que $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$

$\exists(\alpha_1;\alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ Tel que : $\vec{x}=\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2$

On pose : $\vec{x}=(a;b)$

$\vec{x}=\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2 \Leftrightarrow (a;b)=\alpha_1(3;2)+\alpha_2(1;5)$

$\Leftrightarrow (a;b)=(3\alpha_1;2\alpha_1)+(\alpha_2;5\alpha_2)$

$\Leftrightarrow (a;b)=(3\alpha_1+\alpha_2;2\alpha_1+5\alpha_2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=3\alpha_1+\alpha_2 \\ b=2\alpha_1+5\alpha_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1=\dfrac{1}{13}(5a-b) \\ \alpha_2=\dfrac{1}{13}(-2a+3b) \end{cases}$$

donc :famille B=($\vec{x}_1$; $\vec{x}_2$) engendre l'espace

vectoriel réel $\mathbb{R}^2$

Exercice12: On munit $\mathbb{R}^3$ des opérations usuelles.
Soient $F_1 = \{(\lambda, \lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$,
$F_2 =\{ (\lambda - 3\mu, 2\mu, \lambda + \mu), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$
$F_3 =\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}$ et
$F_4 =\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + 3z = 0$ et
$2x + 5y + z = 0\}$
Montrer que F_1, F_2, F_3 et F_4 sont des sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ et en fournir dans chaque cas une famille génératrice.

Solution.

• $F1 = \{(\lambda, \lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\lambda(1, 1, 1), \lambda \in \mathbb{R}\}$ =

Vect($\vec{x}_1$) où $\vec{x}_1$ = (1, 1, 1). F_1 est donc un sous-

espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et une

famille génératrice de F_1 est ($\vec{x}_1$).

• $F_2 =\{ (\lambda - 3\mu, 2\mu, \lambda + \mu), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$
$=\{\lambda(1, 0, 1) + \mu(-3, 2, 1), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$

= Vect($\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$) où $\vec{x}_1$ = (1, 0, 1) et $\vec{x}_1$ =(−3, 2, 1).

F_2 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

et une famille génératrice de F_2 est $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$)

• Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
. $x - y + z = 0 \Leftrightarrow z = -x + y$.
Donc, $F_3 =\{ (x, y, -x + y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$
$=\{x(1, 0, -1) + y(0, 1, 1), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

= Vect($\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$) où $\vec{x}_1$ = (1, 0, −1) et $\vec{x}_2$ =(0, 1, 1).

F_3 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

et une famille génératrice de F_3 est ($\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$).

• Soit $(x, y, z) \in R^3$
.$x + 2y + 3z = 0$ et $2x + 5y + z = 0$
$\Leftrightarrow x = -2y - 3z$ et $2(-2y - 3z) + 5y + z = 0$
$\Leftrightarrow y = 5z$ et $x = -13z$.
Donc, $F_4 = \{(-13z, 5z, z), z \in \mathbb{R}\}$
$=\{z(-13, 5, 1), z \in \mathbb{R}\}$ = Vect($\vec{x}$) où
$\vec{x}$ = (−13, 5, 1). F_4 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et une famille génératrice de F_4 est ($\vec{x}$).

Exercice13:dans l'espace vectoriel réel

$(\mathbb{R}^3;+;.)$ on considére la famille :

$B=(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$tel que : $\vec{u}=(\cos a;\cos b;\cos c)$

$\vec{v}=(\sin a;\sin b;\sin c)$ et

$\vec{w}=(\sin(x+a);\sin(x+b);\sin(x+c))$

Avec ; $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$

Montrer que la famille B est liée

Solution.

On a : $\sin(x+a)=\sin x\cos a+\cos x\sin a$

$$\sin(x+b)=\sin x\cos b+\cos x\sin b$$

$$\sin(x+c)=\sin x\cos c+\cos x\sin c$$

Donc :

$\vec{w}=\sin x(\cos a;\cos b;\cos c)+\cos x(\sin a;\sin b;\sin c)$

Donc : $\vec{w}=\sin x\vec{u}+\cos x\vec{v}$ et puisque :

$(\sin x;\cos x)\neq(0;0)$ alors la famille B est liée

Exercice14: On munit $\mathbb{R}^3$ des opérations usuelles.

Soit : $E=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 / x-y+3z=0\}$

Montrons que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel
Et donner une famille génératrice de E et une base de E

Solutions : Il suffit de montrer que est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

a) $E\neq\varnothing$ car : $(0;0;0)\in E$ en effet : $0-0+3\times0=0$

b)soient : $\vec{u}=(a;b;c)\in E$ et $\vec{v}=(x;y;z)\in E$

et $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$

$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=(\alpha a;\alpha b;\alpha c)+(\beta x;\beta y;\beta z)$

$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=(\alpha a+\beta x;\alpha b+\beta y;\alpha c+\beta z)$

$(\alpha a+\beta x)-(\alpha b+\beta y)+3(\alpha c+\beta z)=$

$=(\alpha a-\alpha b+3\alpha c)+(\beta x-\beta y+3\beta z)$

$\vec{u}=(a;b;c)\in E\Leftrightarrow a-b+3c=0$

Donc : $\alpha a-\alpha b+3\alpha c=0$

De même : $\vec{v}=(x;y;z)\in E\Leftrightarrow x-y+3z=0$

Donc : $\beta x-\beta y+3\beta z=0$

Donc : $(\alpha a+\beta x)-(\alpha b+\beta y)+3(\alpha c+\beta z)=0$

Donc : $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}\in E$

Donc : E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

2) $(x;y;z)\in E\Leftrightarrow x-y+3z=0$

Soit : $\vec{u}=(a;b;c)\in E\Leftrightarrow a-b+3c=0\Leftrightarrow a+3c=b$

$\vec{u}=(a;b;c)=(a;a+3c;c)=a(1;1;0)+c(0;3;1)$

Donc :

$\vec{u}=(a;b;c)=(a;a+3c;c)=a(1;1;0)+c(0;3;1)$

On pose : $\vec{e}_1=(1;1;0)$ et $\vec{e}_2=(0;1;0)$ et $\vec{e}_3=(0;3;1)$

On a donc : $\vec{u}=a\vec{e}_1+c\vec{e}_2$

Donc : $B=(\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ est une famille génératrice de E

Montrons que $B=(\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ est une famille libre ?

Soient : $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$ Tel que

$\alpha\vec{e}_1+\beta\vec{e}_2=\vec{0}\Leftrightarrow(\alpha;\alpha+3\beta;\beta)=(0;0;0)$

$\Leftrightarrow\alpha=0$ ou $\alpha+3\beta=0$ ou $\beta=0$

$\Leftrightarrow\alpha=0$ ou $\beta=0$

Donc : $B=(\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ est une famille libre

Donc : $B=(\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ est une base de E

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien