

## **LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES**

### **I) RAPPELLE ET DEFINITIONS ET NOTATIONS.**

#### **1) Activité et rappelle :**

On s'intéresse à l'équation (E):  $y'' + \omega^2 y = 0$

Dans cette notation  $y$  représente  $f(x)$ .

L'équation (E) est une équation différentielle de second ordre.

Montrer ce qui suit :

1. si  $f$  et  $g$  sont solutions de l'équation (E) alors :

$(\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2)(\alpha f + \beta g)$  est aussi solution de (E)

2. Montrer que les fonctions :

$$u(x) = \cos \omega x \text{ et } v(x) = \sin \omega x$$

sont solution de l'équation différentielle (E).

3. En déduire que  $(\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2)$

$(y = \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x)$  est solution de (E)

On admet que la réciproque est vraie

**Propriété :** Les solutions de l'équation

différentielle : (E):  $y'' + \omega^2 y = 0$  sont les fonctions :

$y = \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des réels.

**Application :** soit l'équation différentielle

$$(E) : y'' + 4y = 0$$

1) Résoudre l'équation différentielle (E)

2) Déterminer la solution  $g$  qui vérifie :

$$g(0) = 1 \text{ et } g'(0) = 2$$

**solution :** ( $\omega = 2$ ) 1) la solution générale de

l'équation différentielle (E) est :

La fonction :  $F(x) = a \cos 2x + b \sin 2x$  où  $a$  et  $b$  sont

des réels

$$2) F'(x) = -2a \sin 2x + 2b \cos 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} F(0) = 1 \\ F'(0) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } F(x) = \cos 2x + \sin 2x$$

On peut écrire  $F(x)$  sous la forme :

$$F(x) = \sqrt{2} \sin \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right)$$



### **2) Définition : EQUATIONS DIFFERENTIELLES**

**Définition :** Une équation différentielle est une équation ayant pour inconnue une ou plusieurs fonctions ; elle se présente sous la forme d'une relation entre ces fonctions inconnues et leurs dérivées successives. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de dérivation auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise.

**Remarque :** Pour simplifier l'écriture d'une équation différentielle on note l'inconnu (qui est une fonction)  $y$  au lieu de  $y(x)$ .

**Exemples :**

1) L'équation différentielle :  $y' = e^{2x}$  a pour solution

les fonctions primitives de la fonction :

$$x \rightarrow e^{2x} \text{ qui sont : } x \rightarrow \frac{1}{2} e^{2x} + c$$

2)  $y' + 5y = 0$  : est une équation différentielle de

1<sup>er</sup> ordre sans second membre.

3)  $y' - 8y = 2x - 1$  est une équation différentielle de

1<sup>er</sup> ordre avec second membre.

4)  $y'' - 3y' + 5y = e^{2x}$  : est une équation

différentielle de 2<sup>ème</sup> ordre avec second membre.

### **II) L'EQUATION $y' = ay$ OU $a \in \mathbb{R}^*$**

#### **1) L'équation $y' = ay$ ou $a \in \mathbb{R}^*$**

Soit  $a$  un réel non nul et Considérons l'équation différentielle (E)  $y' = ay$

$$(E) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(y'(x) = ay(x))$$

a) A noter que la fonction nulle  $\theta$  :

$(\forall x \in \mathbb{R})(\theta(x) = 0)$  est une solution de l'équation différentielle.

b) On suppose que  $y$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$  on

$$\text{aura : } (E) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(y'(x) = ay(x))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(y'(x)/y(x) = a)$$

On passe au primitives on trouve

$$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(\ln |y(x)| = ax + c)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(|y(x)| = \exp(ax+c))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(y(x) = \pm \exp(ax+c) \text{ où } c \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(y(x) = \lambda \exp(ax) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R})$$

Et puisque même la fonction nulle  $\theta$  peut s'écrire de la forme  $\theta(x) = \lambda \exp(ax)$  ( $\lambda = 0$ )

On peut conclure que :

**Propriété :** Soit  $a$  un réel non nul.

(E)  $y' = ay$  une équation différentielle définie sur  $\mathbb{R}$   
La solution générale de l'équation différentielle (E)

est l'ensemble des fonctions :  $x \rightarrow y(x) = \lambda e^{ax}$

Où  $\lambda$  est un réel.

**Exemple :** Résoudre les équations différentielles suivantes : 1) (E<sub>1</sub>):  $y' = 3y$  2) (E<sub>2</sub>):  $y' - y = 0$

**Solution :** 1) La solution générale de l'équation différentielle (E<sub>1</sub>): est l'ensemble des fonctions :

$$x \rightarrow y(x) = \lambda e^{3x} \text{ où } \lambda \text{ est un réel.}$$

$$2) (E_2): y' - y = 0 \Leftrightarrow (E_2): y' = 1y$$

La solution générale de l'équation différentielle

(E<sub>2</sub>): est l'ensemble des fonctions :  $x \rightarrow y(x) = \lambda e^x$

où  $\lambda$  est un réel.

**2) L'équation  $y' = ay + b$  ou  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $b \in \mathbb{R}$ .**

Soient  $a$  un réel non nul,  $b$  un réel quelconque, Considérons l'équation différentielle :

$$(E) y' = ay + b$$

$$(E) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(y'(x) = a(y(x) + \frac{b}{a}))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(y(x) + \frac{b}{a})' = a(y(x) + \frac{b}{a})$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(z'(x) = az(x)) \text{ où } z(x) = y(x) + \frac{b}{a}$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(y(x) + \frac{b}{a} = \lambda e^{ax})$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(y(x) = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a})$$

**Propriété :** Soit  $a$  un réel non nul et  $b$  un réel

(E)  $y' = ay + b$  une équation différentielle définie sur  $\mathbb{R}$ . La solution générale de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions :

$$x \rightarrow y(x) = \lambda e^x - \frac{b}{a} \text{ où } \lambda \text{ est un réel.}$$

**Remarque :** Le réel  $\lambda$  dans la solution générale de l'équation différentielle (E) peut-être déterminé par les conditions initiales

**Exemple1 :** Résoudre l'équation différentielle

$$\text{suivante : } (E): 2y' - 4y - 3 = 0$$

$$\text{Solution : } (E): 2y' - 4y - 3 = 0 \Leftrightarrow 2y' = 4y + 3$$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{4y+3}{2} \Leftrightarrow y' = 2y + \frac{3}{2}$$

$$\text{on a donc ; } a = 2 \text{ et } b = \frac{3}{2}$$

La solution générale de l'équation différentielle (E): est l'ensemble des fonctions :

$$x \mapsto \lambda e^{2x} - \frac{3}{4} \text{ où } \lambda \text{ est un réel.}$$

**Exemple2 :** soit l'équation différentielle

$$\text{suivante : } (E): \frac{1}{2}y' + 3y - 1 = 0$$

1) Résoudre l'équation différentielle (E)

2) Déterminer la solution  $f$  de (E)

Telle que  $f'(0) = -2$ .

$$\text{Solution : 1) } (E): \frac{1}{2}y' + 3y - 1 = 0 \Leftrightarrow y' = -6y + 2$$

$$\text{Donc : } a = -6 \text{ et } b = 2$$

La solution générale de l'équation différentielle (E): est l'ensemble des fonctions :

$$x \mapsto \lambda e^{-6x} + 3 \text{ Où } \lambda \text{ est un réel.}$$

$$2) f(x) = \lambda e^{-6x} + 3 \text{ On va calculer : } f'(x)$$

$$f'(x) = (\lambda e^{-6x} + 3)' = -6\lambda e^{-6x}$$

$$f'(0) = -2 \Leftrightarrow -6\lambda e^0 = -2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

Donc :  $f(x) = \frac{1}{3}e^{-6x} + 3$  c'est la solution de (E) qui

vérifie la condition initiale

**Exercice :** Considérons les équations

différentielles (E<sub>0</sub>):  $y' - y = 0$  et (E) :  $y' - y = 2x^2 + x$

1- Résoudre l'équation différentielle (E<sub>0</sub>)

2- a) Soit  $P$  une fonction polynôme, quel sera le degré de  $P$  afin que  $P$  soit une solution de (E)

b) Déterminer le polynôme  $P$  pour que  $P$  soit une solution de (E)

c) Montrer que :  $y$  est solution de (E) si et seulement si  $(y - P)$  est solution de (E)

d) En déduire la solution générale de l'équation (E)

3) déterminer la solution  $\varphi$  de (E) telle que  $\varphi(0) = 2$



### III) LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES :

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Soit  $a$  un réel non nul et  $b$  et  $c$  sont des réels quelconques.

**Définition :** Considérons l'équation différentielle :  
(E):  $ay'' + by' + cy = 0$

L'équation (1):  $ar^2 + br + c = 0$  à variable réelle  $r$  s'appelle l'équation caractéristique de l'équation différentielle (E).

**Exemples :** 1) l'équation caractéristique de l'équation différentielle (E) :  $-3y'' + 2y' - 4y = 0$  est :  $-3r^2 + 2r - 4 = 0$

2) l'équation caractéristique de l'équation différentielle (E):  $y'' + y = 0$  est :  $r^2 + 1 = 0$ .

#### 1) Résolution de (E): $ay'' + by' + cy = 0$

L'équation  $ay'' + by' + cy = 0$  est dite à coefficients constants car  $a, b$  et  $c$  sont des réels donnés.

On Supposera  $a \neq 0$

(sinon, l'équation est du premier ordre).

##### 1.1) Linéarité :

L'équation  $ay'' + by' + cy = 0$  possède la propriété suivante : Si  $y_1$  et  $y_2$  sont deux fonctions solutions de l'équation :  $ay'' + by' + cy = 0$ , alors, pour tous nombres  $A$  et  $B$ , la fonction  $Ay_1 + By_2$  est aussi une solution.

A cause de cette propriété, on dit que l'équation :  $ay'' + by' + cy = 0$  est linéaire.

**1.2) Résolution :** Par analogie avec une équation du premier ordre, on cherche une solution de la

forme :  $y(x) = e^{rx}$  où  $r$  est un complexe.

La fonction  $y(x) = e^{rx}$  est deux fois dérivables sur

$\mathbb{R}$ , et, pour tout réel  $x$  :  $y'(x) = re^{rx}$  et  $y''(x) = r^2e^{rx}$

Donc, dire que  $y$  est solution équivaut à dire que,

pour tout réel  $x$  :  $ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$  soit

encore, puisque  $e^{rx} \neq 0$ , à :  $ar^2 + br + c = 0$

La résolution de cette l'équation permet donc de trouver des solutions (a priori à valeurs complexes). De plus, lorsque l'on connaît deux solutions  $y_1$  et  $y_2$  de l'équation  $ay'' + by' + cy = 0$ , on en connaît une famille car toutes les Fonctions  $Ay_1 + By_2$

Avec  $A$  et  $B$  complexes, sont aussi solutions.

**Premier cas :** Si  $\Delta > 0$  alors l'équation :

$ar^2 + br + c = 0$  a deux racines,  $r_1$  et  $r_2$  réelles et distinctes et d'après ce qui précède, les fonctions  $y_1$  et  $y_2$  définies sur  $\mathbb{R}$  par:  $y_1(x) = e^{r_1x}$  et

$y_2(x) = e^{r_2x}$  sont des solutions

(à valeurs réelles dans ce cas).

Nous admettons que toute autre solution réelle s'écrit :  $y(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$  où  $A$  et  $B$  réels.

**Deuxième cas :** Si  $\Delta < 0$  alors l'équation

$ar^2 + br + c = 0$  : a deux racines,  $z_1$  et  $z_2$ , complexe conjugués.

Alors les fonctions  $g_1$  et  $g_2$  définies sur  $\mathbb{R}$  par:

$g_1(x) = e^{z_1x}$  et  $g_2(x) = e^{\bar{z}_1x}$  sont des solutions

à valeurs complexes.

Notons  $z_1 = p + qi$  où  $p$  et  $q$  sont des réels.

$g_1(x) = e^{(p+qi)x} = e^{px} e^{qxi} = e^{px} (\alpha \cos qx + \beta \sin qx)$

et  $g_2(x) = e^{(p-qi)x} = e^{px} e^{-qxi} = e^{px} (\alpha \cos qx - \beta \sin qx)$

donc ;  $y_1 = \frac{g_1(x) - g_2(x)}{2}$  et  $y_2 = \frac{g_1(x) + g_2(x)}{2i}$

Sont aussi des solutions de (E) et à valeurs réelles et on a :

$(\forall x \in \mathbb{R}) y_1(x) = e^{px} \cos qx$  et  $(\forall x \in \mathbb{R}) y_2(x) = e^{px} \sin qx$

Nous admettons que toutes les solutions s'écrivent de la forme :

$y(x) = e^{px} (A \cos qx + B \sin qx)$

Pour résumer : si  $z_1 = p + qi$  alors toutes les

solutions de (E) s'écrivent de la forme :

$y(x) = e^{px} (A \cos qx + B \sin qx)$

où  $A$  et  $B$  sont des réels.

**Troisième cas :** Si  $\Delta = 0$  l'équation  $ar^2 + br + c = 0$  a une racine double  $r$



Alors les fonctions  $y_1$  définie sur IR par:  $y_1(x) = e^{rx}$  est solution de (E) ; nous admettons que la fonction  $y_2(x) = xe^{rx}$  est aussi solutions de (E) et que toutes les solutions de (E) s'écrivent de la forme  $y(x) = (Ax+B)e^{rx}$  où  $A$  et  $B$  sont des réels

**Théorème :** Soit l'équation différentielle :

$$(E) ay'' + by' + cy = 0$$

Et soit  $(E_1): ar^2 + br + c = 0$  son équation Caractéristique.

$$\Delta = b^2 - 4ac \text{ le discriminant de } (E_1)$$

**1) Si  $\Delta > 0$**  l'équation  $(E_1)$  a deux racines :  $r_1$  et  $r_2$

réelles et distinctes et les solutions de l'équation

$$(E) \text{ sont les fonctions : } y(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$$

où  $A$  et  $B$  réels

**2) Si  $\Delta < 0$**  l'équation  $(E_1)$  a deux racines  $z_1$  et  $z_2$

complexes conjugués et si :  $z_1 = p + qi$  alors les

solutions de l'équation  $(E)$  sont les fonctions

$$y(x) = e^{px} (A \cos qx + B \sin qx) \text{ où } A \text{ et } B \text{ réels}$$

**3) Si  $\Delta = 0$**  l'équation  $(E_1)$  admet une racine double  $r$  et les solutions de  $(E)$  sont les fonctions:

$$y(x) = (Ax+B)e^{rx} \text{ Où } A \text{ et } B \text{ sont des réels.}$$

**Exemples :**

**Exemple1 :**1) Résoudre l'équations différentielle

$$\text{suivante : } (E) : y'' - 7y' + 12y = 0$$

2) Déterminer la solution  $f$  de  $(E)$

$$\text{Telle que } f(0) = 0 \text{ et } f'(0) = 1$$

**Solution :1)** l'équation Caractéristique de  $(E)$  est :

$$(E_1): r^2 - 7r + 12 = 0$$

On a :  $\Delta = 1$  donc l'équation  $(E_1)$  a deux racines :

$$r_1 \text{ et } r_2 \text{ réelles et distinctes : } r_1 = 3 \text{ et } r_2 = 4$$

Donc les solutions de l'équation  $(E)$  sont les

$$\text{fonctions : } y(x) = \alpha e^{4x} + \beta e^{3x} \text{ où } \alpha \text{ et } \beta \text{ réels}$$

$$2) f(x) = \alpha e^{4x} + \beta e^{3x}$$

$$f'(x) = (\alpha e^{4x} + \beta e^{3x})' = 4\alpha e^{4x} + 3\beta e^{3x}$$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 4\alpha + 3\beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\alpha \\ 4\alpha - 3\alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

Donc :  $f(x) = e^{4x} - e^{3x}$  c'est la solution de  $(E)$  qui vérifie les conditions initiales

**Exemple2 :**1) Résoudre l'équations différentielle

$$\text{suivante : } (E) : y'' - 2y' + y = 0$$

2) Déterminer la solution  $f$  de  $(E)$

$$\text{Telle que } f(0) = 0 \text{ et } f'(0) = 1$$

**Solution :1)** l'équation Caractéristique de  $(E)$  est :

$$(E_1): r^2 - 2r + 1 = 0$$

On a :  $\Delta = 0$  donc l'équation  $(E_1)$  admet une racine double  $r_0 = \frac{-b}{2a} = 1$

Donc les solutions de l'équation  $(E)$  sont les

$$\text{fonctions : } y(x) = (\alpha x + \beta)e^x \text{ où } \alpha \text{ et } \beta \text{ réels}$$

$$2) f(x) = (\alpha x + \beta)e^x$$

$$f'(x) = ((\alpha x + \beta)e^x)' = ((\alpha x + \beta))' e^x + (\alpha x + \beta)(e^x)'$$

$$f'(x) = (\alpha x + \alpha + \beta)e^x$$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } f(x) = (1x + 0)e^x \text{ donc : } f(x) = xe^x$$

C'est la solution de  $(E)$  qui vérifie les conditions initiales.

**Exemple3 :**1) Résoudre l'équations différentielle

$$\text{suivante : } (E) : y'' - 4y' + 13y = 0$$

2) Déterminer la solution  $f$  de  $(E)$

$$\text{Telle que } f(0) = 0 \text{ et } f'(0) = 1$$

**Solution :1)** l'équation Caractéristique de  $(E)$  est :

$$(E_1): r^2 - 4r + 13 = 0$$



On a :  $\Delta = -36 = (6i)^2$  donc l'équation  $(E_1)$  a deux racines  $z_1$  et  $z_2$  complexes conjugués et on a :

$$z_1 = \frac{4+i6}{2} \text{ et } z_2 = \frac{4-i6}{2} \text{ donc } z_1 = 2+3i = p+iq$$

Donc les solutions de l'équation  $(E)$  sont les fonctions :  $y(x) = e^{2x}(\alpha \cos 3x + \beta \sin 3x)$  où  $\alpha$  et  $\beta$  réels

$$2) f(x) = e^{2x}(\alpha \cos 3x + \beta \sin 3x)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{2x}(\alpha \cos 3x + \beta \sin 3x))' \\ &= (e^{2x})'(\alpha \cos 3x + \beta \sin 3x) + e^{2x}(\alpha \cos 3x + \beta \sin 3x)' \\ &= 2e^{2x}(\alpha \cos 3x + \beta \sin 3x) + e^{2x}(-3\alpha \sin 3x + 3\beta \cos 3x) \end{aligned}$$

$$f'(x) = e^{2x}(2\alpha \cos 3x + 2\beta \sin 3x - 3\alpha \sin 3x + 3\beta \cos 3x)$$

$$f'(x) = e^{2x}((2\alpha + 3\beta)\cos 3x + (2\beta - 3\alpha)\sin 3x)$$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\alpha + 3\beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Donc : } f(x) = e^{2x}\left(0 \times \cos 3x + \frac{1}{3} \sin 3x\right) = \frac{1}{3}e^{2x} \sin 3x$$

c'est la solution de  $(E)$  qui vérifie les conditions initiales

**Exercice :** Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$1) y' = 7y - 5 \quad \text{avec } y(0) = -6$$

$$2) y'' - 15y' + 56y = 0 \quad \text{avec : } y'(0) = 9 ; y(0) = -3$$

$$3) y'' + 14y' + 49y = 0 \quad \text{avec : } y'(0) = 6 ; y(0) = -3$$

$$4) y'' + y' + \frac{5}{2}y = 0 \quad \text{avec : } y'(0) = 6 ; y(0) = -4$$

**Solutions :** 1)  $y' = 7y - 5$  Donc les solutions de l'équation  $(E)$  sont les fonctions :

$$y(x) = \lambda e^{7x} + \frac{5}{7} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$\text{On a : } y(0) = \lambda + \frac{5}{7} = -6 \text{ donc : } \lambda = -\frac{47}{7}$$

Donc : la solution de l'équation qui vérifie les

$$\text{conditions initiales est : } y(x) = -\frac{47}{7}e^{7x} + \frac{5}{7}$$

$$2) y'' - 15y' + 56y = 0 \quad \text{avec : } y'(0) = 9 ; y(0) = -3$$

l'équation Caractéristique de l'équation est :

$$r^2 - 15r + 56 = 0 \text{ donc : } r_1 = 7 \text{ et } r_2 = 8$$

$$\text{Donc : } y(x) = \alpha e^{7x} + \beta e^{8x} \quad \text{où } \alpha \text{ et } \beta \text{ réels}$$

$$\text{Donc : } y'(x) = 7\alpha e^{7x} + 8\beta e^{8x}$$

$$\begin{cases} y(0) = \alpha + \beta \\ y'(0) = 7\alpha + 8\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(0) = -3 \\ y'(0) = 9 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} \alpha + \beta = -3 \\ 7\alpha + 8\beta = 9 \end{cases} \text{ donc : } \beta = 30 ; \alpha = -33$$

Donc : la solution de l'équation qui vérifie les

$$\text{conditions initiales est : } y(x) = -33e^{7x} + 30e^{8x}$$

$$3) y'' + 14y' + 49y = 0 \quad \text{avec : } y'(0) = 6 ; y(0) = -3$$

l'équation Caractéristique de l'équation est :

$$r^2 + 14r + 49 = 0 \text{ donc : } r = -7$$

$$\text{Les solutions : } ((\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2) \quad y(x) = (\alpha x + \beta)e^{-7x}$$

$$y'(x) = \alpha e^{-7x} - 7(\alpha x + \beta)e^{-7x}$$

$$\begin{cases} y(0) = -3 \\ y'(0) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(0) = \beta \\ y'(0) = \alpha - 7\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -3 \\ \alpha - 7\beta = 6 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } \alpha = -15 ; \beta = -3$$

Donc : la solution de l'équation qui vérifie les

$$\text{conditions initiales est } y(x) = (-15x - 3)e^{-7x}$$

$$4) y'' + y' + \frac{5}{2}y = 0 \quad \text{avec : } y'(0) = 6 ; y(0) = -4$$

l'équation Caractéristique de l'équation est :

$$r^2 + r + \frac{5}{2} = 0 \text{ on trouve : } z = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \text{ et } \bar{z} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$\text{Donc : } ((\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2) \quad y(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left( \alpha \cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \beta \sin\left(\frac{3}{2}x\right) \right)$$



où  $\alpha$  et  $\beta$  réels

$$y'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \left( \alpha \cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \beta \sin\left(\frac{3}{2}x\right) \right) + \frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \left( -\alpha \sin\left(\frac{3}{2}x\right) + \beta \cos\left(\frac{3}{2}x\right) \right)$$

$$\begin{cases} y(0) = -4 \\ y'(0) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y(0) = \alpha \\ y'(0) = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -4 \\ -\frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}\beta = 6 \end{cases}$$

Donc :  $\alpha = -4$  ;  $\beta = \frac{8}{3}$

Donc : la solution de l'équation qui vérifie les conditions initiales est

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left( -4 \cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{8}{3} \sin\left(\frac{3}{2}x\right) \right)$$

**Exercice :** Résoudre les équations différentielles suivantes :

1.  $2y'' + y' - 3y = 0$
2.  $y'' + 2y' + 2y = 0$
3.  $y'' + 4y' + 4y = 0$
4.  $y'' + 2y = 0$



« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »  
Dit un proverbe.

*C'est en s'entraînant régulièrement*

*Aux calculs et exercices Que l'on devient*

*Un mathématicien*

