

## TD : LA DERIVATION – APPLICATIONS

### Etude de fonctions

**Exercice1 :** Soit  $f(x) = x\sqrt{x^2 - x}$

Etudier les variations de la fonction  $f$

**Solution :**  $D_f = ]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$

On a :  $f(x) = x\sqrt{u(x)}$  avec  $u(x) = x^2 - x$

Et on a :  $u(x) > 0 \quad \forall x \in D_f - \{0; 1\}$

Donc  $f$  est dérivable sur  $D_f - \{0; 1\}$

$$\forall x \in D_f - \{0; 1\} : f'(x) = (x\sqrt{x^2 - x})' = x'\sqrt{x^2 - x} + x \frac{(x^2 - x)'}{2\sqrt{x^2 - x}}$$

$$f'(x) = \sqrt{x^2 - x} + x \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}} = \frac{4x^2 - 3x}{2\sqrt{x^2 - x}}$$

Puisque :  $2\sqrt{x^2 - x} > 0 \quad \forall x \in D_f - \{0; 1\}$

Le signe de  $f'(x)$  est le signe de  $4x^2 - 3x$

Le tableau de signe de :  $4x^2 - 3x$  est :

$x$	$-\infty$	$0$	$3/4$	$+\infty$	
$4x^2 - 3x$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

On a :  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in ]1; +\infty[$  et  $\forall x \in ]-\infty; 0[$

donc  $f$  est strictement croissante sur  $]4/3; +\infty[$

et sur  $]-\infty; 0[$

**Exercice2 :** Soit  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$

Etudier les extremums de la fonction  $f$

**Solution :**  $D_f = \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = x^2 + x - 2$

Le signe de  $f'(x)$  est le signe de  $x^2 + x - 2$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$\Delta = 9$  deux solutions :  $x_1 = 1$  et  $x_2 = -2$

Donc voici le tableau de variation de  $f$  :

$x$	$-\infty$	$-2$	$1$	$+\infty$			
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$10/3$	$\searrow$	$-7/6$	$\nearrow$	$+\infty$

Du tableau de variation de  $f$  en déduit que :

$f$  admet une valeur minimal relatif c'est  $-7/6$  en  $1$

$f$  admet une valeur maximal relatif c'est  $10/3$  en  $-2$

**Exercice3 :** Soient les fonctions suivantes :

1)  $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$     2)  $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 1$

3)  $h(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(x - 1)^2}$

Etudier les variations de ces fonctions et déterminer les extremums s'ils existent

**Solution :** 1)  $D_f = \mathbb{R}$   $f$  est une fonction polynôme

donc dérivable sur  $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 6x - 2 = 2(3x - 1)$$

Le signe de  $f'(x)$  est le signe de  $3x - 1$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Donc voici le tableau de variation de  $f$  :

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$

$f'$  s'annule en  $\frac{1}{3}$  en changeant de signe à droite

et à gauche alors  $f$  admet un extremum en  $\frac{1}{3}$

Du tableau de variation de  $f$  en deduit que :

$f$  Admet une valeur minimal absolue

c'est  $\frac{2}{3}$  en  $\frac{1}{3}$  donc :  $\forall x \in \mathbb{R} f(x) \geq \frac{2}{3}$

1)  $D_g = \mathbb{R}$   $g$  est une fonction polynôme donc

dérivable sur  $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R} g'(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

Puisque :  $g'(x) \geq 0$  et  $g$  s'annule seulement en

$x=1$  alors la fonction  $g$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  et  $g$  n'admet pas d'extremums

$$3) h(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^2} \quad x \in D_h \Leftrightarrow x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

$$D_h = \mathbb{R} - \{1\} = ]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[$$

Puisque  $h$  est une fonction rationnelle alors il

dérivable sur  $D_h$

$$\forall x \in D_h : h'(x) = \frac{(2x+1)'(x-1)^2 - 2(x^2+x+1)(x-1)'}{(x-1)^4}$$

$$h'(x) = \frac{3(x+1)}{(x-1)^3} = \frac{3}{(x-1)^2} \times \frac{x+1}{x-1}$$

Puisque:  $\forall x \in \mathbb{R} - \{3\} \frac{3}{(x-1)^2} > 0$  Le signe de  $h'(x)$

est le signe de  $\frac{x+1}{x-1}$

Donc voici le tableau de variation de  $h$  :

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-	+
$h(x)$	$-1$	$-\frac{1}{4}$	$-\infty$	$-1$

$h'$  s'annule en  $-1$  en changeant de signe à droite et

à gauche alors  $f$  admet un extremum en  $-1$

Du tableau de variation de  $f$  en deduit que :

$f$  Admet une valeur maximal relative

c'est  $-\frac{1}{4}$  en  $-1$

**Exercice4** : Soit la fonction :  $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x$

Montrer que  $f$  est majorée sur l'intervalle :

$$I_1 = ]-\infty; 1] \text{ et minorée sur l'intervalle : } I_2 = \left[-\frac{1}{2}; +\infty[$$

et bornée sur l'intervalle :  $I_3 = \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$

**Solution** : 1)  $D_f = \mathbb{R}$   $f$  est une fonction polynôme

donc dérivable sur  $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R} f'(x) = 6(2x^2 - x - 1) = 6(x-1)(2x+1)$$

Le signe de  $f'(x)$  est le signe de  $(x-1)(2x+1)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

Donc voici le tableau de variation de  $f$  :

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{7}{4}$	$-5$	$+\infty$

Du tableau de variation de  $f$  on a :

- $f$  est croissante sur  $]-\infty; -\frac{1}{2}]$  et décroissante

sur  $[-\frac{1}{2}; 1]$  en deduit que  $f$  Admet une valeur

maximal en  $-\frac{1}{2}$  sur  $I_1$  c'est  $\frac{7}{4}$  donc :

$\forall x \in I_1 : f(x) \leq \frac{7}{4}$  donc que f est majorée sur

l'intervalle :  $I_1 = ]-\infty; 1]$  par  $\frac{7}{4}$

- f est décroissante sur  $[-\frac{1}{2}; 1]$  et croissante

sur  $[1; +\infty[$  en deduit que f Admet une valeur

minimal en 1 sur  $I_2$  c'est -5 donc :

$\forall x \in I_2 : -5 \leq f(x)$  donc que f est minorée sur

l'intervalle :  $I_2$  par -5

**Exercice5 :** Soit la fonction f définie sur  $I = [0; \pi]$

par :  $f(x) = \sin^2 x$  Étudier la concavité de la courbe de f et déterminer les points d'inflexions s'ils existent sur I

**Solution :**  $\forall x \in [0; \pi]$

$$f'(x) = (\sin^2 x)' = 2(\sin x)' (\sin x)^{2-1} = 2 \cos x \sin x$$

$$f'(x) = \sin 2x \Rightarrow f''(x) = 2 \cos 2x \quad \forall x \in [0; \pi]$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

Et  $k \in \mathbb{Z}$  donc les solutions sont :  $x = \frac{\pi}{4}$  et  $x = \frac{3\pi}{4}$

$$x \in [0; \pi] \Rightarrow 2x \in [0; 2\pi]$$

2x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cos2x	+	0	-	0

On a donc :

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
f''(x)	+	0	-	0

Donc :  $(C_f)$  est convexe sur  $[0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}; \pi]$

$(C_f)$  est concave sur  $[\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}]$  et  $A(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2})$  et

$B(\frac{3\pi}{4}, \frac{1}{2})$  sont les points d'inflexions de  $(C_f)$

**Exercice6 :** Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x-x^2} \quad 1) \text{ Déterminer } D_f$$

2) montrer que la La droite  $(\Delta): x = \frac{1}{2}$  est un axe

de symétrie de la courbe  $C_f$

**Solution :1)** On a :  $f(x) = \sqrt{x-x^2}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x-x^2 \geq 0\}$$

$$x-x^2 = 0 \Leftrightarrow x(1-x) = 0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=0$$

Tableau de signe :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x-x^2$	-	0	+	0

donc :  $D_f = [0, 1]$

2)a) montrons que : si  $x \in D_f = [0, 1]$  alors

$$1-x \in D_f ?$$

$$x \in D_f = [0, 1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Rightarrow 1-1 \leq 1-x \leq 1$$

Donc :  $x \in D_f \Rightarrow 0 \leq 1-x \leq 1 \Rightarrow 1-x \in D_f$

b) montrons que :  $f(1-x) = f(x)$  ?????

$$\begin{aligned} f(1-x) &= \sqrt{(1-x)-(1-x)^2} = \sqrt{1-x-(1-2x+x^2)} \\ &= \sqrt{1-x-1+2x-x^2} = \sqrt{x-x^2} = f(x) \end{aligned}$$

Donc : La droite  $(\Delta): x = \frac{1}{2}$  est un axe de

symétrie de la courbe  $C_f$

**Exercice7 :** Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sin x - \cos x \quad \text{Montrer que le point } \Omega\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$$

est un centre de symétrie de  $(C_f)$

**Solution :** a) on a si  $x \in \mathbb{R}$  alors  $2\frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{2} - x \in \mathbb{R}$

b) montrons que :  $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \times 0 - f(x) \text{ ??}$

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x - \sin x$$

$$\text{donc } f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \times 0 - f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

donc le point  $\Omega\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$  est un centre de symétrie de  $(C_f)$

**Exercice8 :** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = x^2 \sqrt{1+x}$$

1. étudier la dérivabilité de  $f$  à droite en  $x_0 = -1$ .

2. donner une interprétation géométrique

**Solution :**  $D_f = [-1, +\infty[$

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 \sqrt{1+x} - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 \sqrt{1+x}}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 (\sqrt{1+x})^2}{(x+1)\sqrt{1+x}} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2(1+x)}{(x+1)\sqrt{1+x}} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

Donc  $f$  n'est pas dérivable à droite en  $x_0 = -1$ .

2) Interprétation géométrique :

La courbe  $C_f$  admet une demi-tangente verticale à droite du point  $A(-1; f(-1))$  dirigée vers le haut

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = +\infty \quad (+ \times + = +)$$

**Exercice9 :** soit  $f$  une fonction définie par :

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$$

1) déterminer  $D_f$  ensemble de définition de  $f$

2) étudier les branches infinies de la courbe  $(C_f)$

3) étudier la position de courbe  $(C_f)$  avec son asymptote horizontale

4) étudier les variations de  $f$  et dresser le

tableaux de variation de  $f$

5) déterminer les points d'intersections de  $(C_f)$

avec l'axe des abscisses  $f$

6) montrer que la droite d'équation  $x = \frac{1}{2}$  est un

axe de symétrie de  $(C_f)$

7) tracer la courbe  $(C_f)$

**Solution :** 1)  $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 0$  et  $x \neq 1$

$$\text{donc : } D_f = ]-\infty; 0[ \cup ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$$

2) étude des branches infinies de la courbe  $(C_f)$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = 2$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = 0$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

La droite  $(\Delta)$ :  $y = 2$  est une asymptote horizontal

a la courbe  $C_f$  au voisinage de  $\pm\infty$

$$\text{b) on a } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} 2 - \frac{1}{x-1} = 3$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

donc La droite  $(\Delta')$ :  $x = 0$  est une asymptote

a la courbe  $C_f$

$$\text{c) on a } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{x-1} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{x-1} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} 2 + \frac{1}{x} = 3$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

donc La droite  $(\Delta'')$ :  $x = 1$  est une asymptote

a la courbe  $C_f$  3) étude de la position de courbe

$(C_f)$  avec son asymptote horizontale :  $(\forall x \in D_f)$

$$f(x) - 2 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-x}{x(x-1)} = \frac{-1}{x(x-1)}$$

si  $x \in ]0;1[$  alors  $f(x) - 2 > 0$

Donc la courbe  $C_f$  est au-dessus de  $(\Delta): y = 2$

si  $x \in ]-\infty;0[ \cup ]1;+\infty[$  alors  $f(x) - 2 < 0$

Donc la courbe  $C_f$  est au-dessous de  $(\Delta): y = 2$

5) déterminons les points d'intersections de  $(C_f)$

avec l'axe des abscisses :  $(\forall x \in D_f)$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - x - 1}{x(x-1)} = 0$$

$$2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \text{ ou } x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

Donc les points d'intersections de  $(C_f)$  avec l'axe

des abscisses sont :  $A\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}; 0\right)$  et  $B\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}; 0\right)$

6) montrons que la droite d'équation  $x = \frac{1}{2}$  est un axe de symétrie de  $(C_f)$  :

On a :  $D_f = ]-\infty;0[ \cup ]0;1[ \cup ]1;+\infty[$

a) si  $x \in D_f$  alors  $1-x \in D_f$  en effet :

$$x \in \mathbb{R} - \{0;1\} \Rightarrow x \neq 0 \text{ et } x \neq 1$$

$$\Rightarrow -x \neq 0 \text{ et } -x \neq -1 \Rightarrow 1-x \neq 1 \text{ et } 1-x \neq 0$$

alors  $1-x \in \mathbb{R} - \{0;1\}$

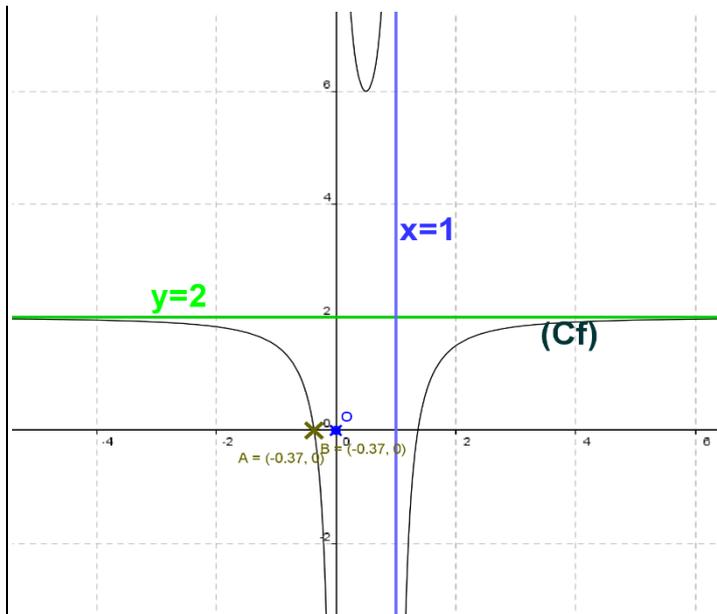
b) montrons que :  $f(1-x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R} - \{0;1\}$  ????

$$f(1-x) = 2 + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x-1} = 2 + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} = 2 - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x}$$

donc  $f(1-x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R} - \{0;1\}$

donc la droite  $x = \frac{1}{2}$  est un axe de symétrie de la

courbe  $C_f$



**Exercice 10** : Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$$

- 1) Déterminer  $D_f$
- 2) Déterminer les limites aux bornes de  $D_f$
- 3) étudier les branches infinies de la courbe  $(C_f)$
- 4) étudier la dérivabilité de  $f$  adroite de 2 et à gauche de -1
- 5) étudier les variations de  $f$  et dresser le tableaux de variation de  $f$
- 6) tracer la courbe  $(C_f)$

**Solution** : 1)  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - x - 2 \geq 0\}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9 = (3)^2 > 0$$

$$x_1 = -1 \text{ et } x_2 = 2$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$	
$x^2 - x - 2$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

Donc :  $D_f = ]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$

2) on a :  $\forall x \in D_f - \{0\}$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} = |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}$$

Et puisque :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1$

Alors :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

3) étude des branches infinies de la courbe ( $C_f$ )

au voisinage de  $-\infty$  et  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x - 2} + x)(\sqrt{x^2 - x - 2} - x)}{\sqrt{x^2 - x - 2} + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x - 2}{\sqrt{x^2 - x - 2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 - \frac{2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1} = -\frac{1}{2}$$

Donc : la droite  $y = x - \frac{1}{2}$  est une asymptote

oblique à la courbe  $C_f$  au voisinage de  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x - 2} + x)(\sqrt{x^2 - x - 2} - x)}{\sqrt{x^2 - x - 2} - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x - 2}{\sqrt{x^2 - x - 2} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1 - \frac{2}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} - 1} = \frac{1}{2}$$

Donc : la droite  $y = -x + \frac{1}{2}$  est une asymptote

oblique à la courbe  $C_f$  au voisinage de  $-\infty$

4) étude de la dérivabilité de  $f$  adroite de 2

et à gauche de -1

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - x - 2}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - x - 2}} = +\infty$$

Donc  $f$  n'est pas dérivable à droite de 2

et à gauche de -1

Alors la courbe  $C_f$  admet une demi-tangente verticale aux points  $A(-1.0)$  et  $B(2.0)$

5) étude des variations de  $f$  et le tableaux de variation de  $f$  ?

$$x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow \forall x \in ]-\infty; -1[ \cup ]2; +\infty[$$

$$\text{Donc : } f'(x) = (\sqrt{x^2 - x - 2})' = \frac{(x^2 - x - 2)'}{2\sqrt{x^2 - x - 2}} = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x - 2}}$$

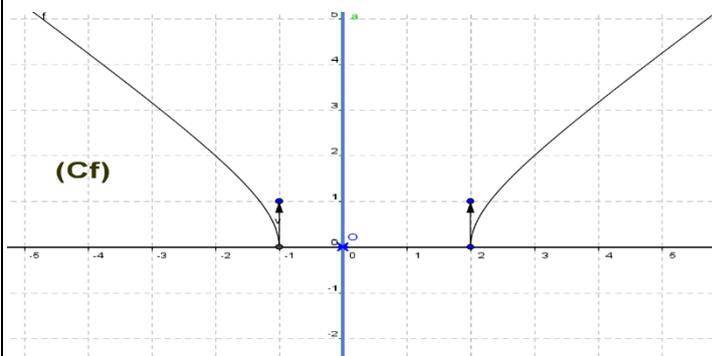
$$f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x - 2}} \quad \forall x \in ]-\infty; -1[ \cup ]\frac{1}{2}; +\infty[$$

Le signe de  $f'(x)$  est celui de :  $2x - 1$

$x$	$-\infty$	$1$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$			$+$
$f(x)$	$+\infty$			$+\infty$

$\swarrow 0$        $\searrow 0$

6) tracer la courbe ( $C_f$ )



**Exercice 11** : soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$

$$\text{par : } \begin{cases} f(x) = x - 1 + 3\sqrt[3]{1 - x}; & \text{si } \dots x \leq 1 \\ f(x) = (x - 1) \left( 1 + \arctan \frac{1}{x} \right); & \text{si } \dots 1 > x \end{cases}$$

( $C_f$ ) La courbe de  $f$  dans un repère orthonormé

1)a) monter que  $f$  est continue en  $x_0 = 1$

b) étudier la dérivabilité de  $f$  en  $x_0 = 1$  et donner une Interprétation géométrique du résultat :

2)a) calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

b) montrer que la courbe de  $f$  admet une asymptote oblique d'équation  $(\Delta): y = x$  au voisinage de  $+\infty$

c) Étudier les branches infinies de  $(C_f)$  au voisinage de  $-\infty$

3) a) étudier les variations de  $f$  sur  $I = ]-\infty; 1[$

b) donner le tableau de variation de  $f'$  sur

$$K = [1; +\infty[ \quad \text{et en déduire les variations de } f \text{ sur } K$$

4) soit  $g$  la restriction de  $f$  sur  $J = ]-\infty; 0]$

a) Montrer que  $g$  est une bijection de  $J$  vers un intervalle  $L$  que l'on déterminera

b) résoudre dans  $\mathbb{R}^+$  l'équation suivante :

$$t^3 - 3t - 2 = 0 \quad \text{et déterminer : } g^{-1}(-2) \text{ et } (g^{-1})'(-2)$$

c) Représenter  $(C_f)$  et  $(C_{g^{-1}})$  dans le même repère orthonormé.

**Solution :** on a  $f(1) = 0$

$$1) a) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \left( 1 + \arctan \frac{1}{x} \right) = 0 = f(1)$$

Donc  $f$  est continue à droite en  $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x - 1 + 3\sqrt[3]{1-x} = 0 = f(1)$$

Donc  $f$  est continue à gauche en  $x_0 = 1$

Donc  $f$  est continue en  $x_0 = 1$

• b) étude de la dérivabilité de  $f$  à droite en  $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 + \arctan \frac{1}{x} = 1 + \frac{\pi}{4}$$

Donc  $f$  est dérivable à droite en  $x_0 = 1$  et  $f'_d(1) = 1 + \frac{\pi}{4}$

*Interprétation géométrique du résultat :*

La courbe de  $f$  admet une demi tangente à droite

de  $A(1, 0)$ . de coefficient directeur  $f'_d(1) = 1 + \frac{\pi}{4}$

d'équation:  $y = f(1) + f'_d(1)(x-1)$  avec  $x \geq 1$

$$y = 0 + \left( 1 + \frac{\pi}{4} \right) (x-1) \Leftrightarrow (T_d): y = \left( 1 + \frac{\pi}{4} \right) (x-1) \quad \text{avec } x \geq 1$$

• étude de la dérivabilité de  $f$  à gauche en  $x_0 = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1 + 3\sqrt[3]{1-x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 + 3 \frac{\sqrt[3]{1-x}}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - 3 \sqrt[3]{\frac{1}{(1-x)^2}} = -\infty \end{aligned}$$

Donc  $f$  n'est pas dérivable à gauche en  $x_0 = 1$

*Interprétation géométrique du résultat :*

La courbe de  $f$  admet une demi tangente vertical a gauche de  $A(1, 0)$

$$2) a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 + 3\sqrt[3]{1-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 - 3x \sqrt[3]{\frac{1-x}{(-x)^3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -1 + x \left( 1 - 3 \sqrt[3]{\frac{1-x}{(-x)^3}} \right)$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 \sqrt[3]{\frac{1-x}{(-x)^3}} = 0 \quad \text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) \left( 1 + \arctan \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \arctan \frac{1}{x} = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) \left( 1 + \arctan \frac{1}{x} \right) - x =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \arctan \frac{1}{x} - 1 - x \arctan \frac{1}{x}$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \arctan \frac{1}{x} = 0 \quad \text{on calcule } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \arctan \frac{1}{x} = ??$$

$$\text{On pose : } t = x \arctan \frac{1}{x} \quad \text{donc : } \tan t = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\tan t}$$

$$x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow t \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \arctan \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\tan t} = 1$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0$$

Donc : la courbe de f admet une asymptote oblique d'équation ( $\Delta$ ):  $y = x$  au voisinage de  $+\infty$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{1}{x} - 3\sqrt[3]{\frac{1-x}{(-x)^3}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -1 + 3\sqrt[3]{1-x} = +\infty$$

la courbe de f admet une branche parabolique dans la direction de la droite ( $\Delta$ ):  $y = x$  au voisinage de  $-\infty$

3)a) étude des variations de f sur  $I = ]-\infty; 1[$

On a :  $f(x) = x - 1 + 3\sqrt[3]{1-x}$  si  $x < 1$  est dérivable sur  $I = ]-\infty; 1[$  (la somme de fonctions dérivables) sur  $I$

$$\forall x \in ]-\infty; 1[ \quad f'(x) = 1 + 3 \times \frac{1}{3} (1-x)^{-\frac{2}{3}} (1-x)^{-\frac{2}{3}} = 1 - (1-x)^{-\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt[3]{(1-x)^2} - 1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}} \text{ et puisque : } \sqrt[3]{(1-x)^2} > 0$$

$$\forall x \in ]-\infty; 1[ \quad \text{le signe de } f'(x) \text{ est celui de : } \sqrt[3]{(1-x)^2} - 1$$

$$\sqrt[3]{(1-x)^2} \geq 1 \Leftrightarrow (1-x)^2 \geq 1 \Leftrightarrow (1-x)^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow -x(2-x) \geq 0$$

TV : de variations de f

b) on a f est dérivable sur

$K = [1; +\infty[$  (la somme de fonctions dérivables sur K)

$$\forall x \in K = [1; +\infty[ \quad f'(x) = 1 + \arctan \frac{1}{x} - \frac{x-1}{x^2+1}$$

x	$-\infty$	0	1
f'(x)	+	0	-
f(x)	$-\infty$	2	0

donc  $f'$  est dérivable sur K (la somme de fonctions dérivables sur K)

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} + \frac{x^2 - 2x - 1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-(2x+1)}{(x^2+1)^2} < 0 \quad \forall x \in K = [1; +\infty[$$

donc  $f'$  est décroissante sur K

et puisque  $f'$  est continue sur K alors :

$$f'(K) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f'; f'(1) \right] = \left] 1; 1 + \frac{\pi}{4} \right] \text{ donc } f'(x) > 0$$

$\forall x \in K = [1; +\infty[$  donc f est croissante sur K

Le tableau de variation de  $f'$  sur  $K = [1; +\infty[$  est :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f''(x)	+	0	-	0
f'(x)	$-\infty$	2	0	$+\infty$

4)a) on a :  $g(x) = f(x) = x - 1 + 3\sqrt[3]{1-x} \quad \forall x \in J$

D'après les questions précédentes on a g est continue et strictement croissante sur J alors

g est une bijection de J vers un l'intervalle

$$K = g(J) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} g; g(0) \right] = ]-\infty; 2]$$

b) on a t=2 est une solution de l'équation :

$$t^3 - 3t - 2 = 0 \text{ la division euclidienne donne :}$$

$$t^3 - 3t - 2 = (t-2)(t+1)^2 \text{ une solution de}$$

$$\text{l'équation : } t^3 - 3t - 2 = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^+ \text{ est } S = \{2\}$$

$$\text{on pose : } g^{-1}(-2) = x \Leftrightarrow -2 = g(x) \text{ et } x \in J$$

$$\text{donc : } x - 1 + 3\sqrt[3]{1-x} = -2 \text{ et } x \in J$$

$$\text{on pose : } t = \sqrt[3]{1-x} \text{ donc : } t^3 - 3t - 2 = 0 \text{ et } t \geq 1$$

D'après les questions précédentes :  $t = 2$

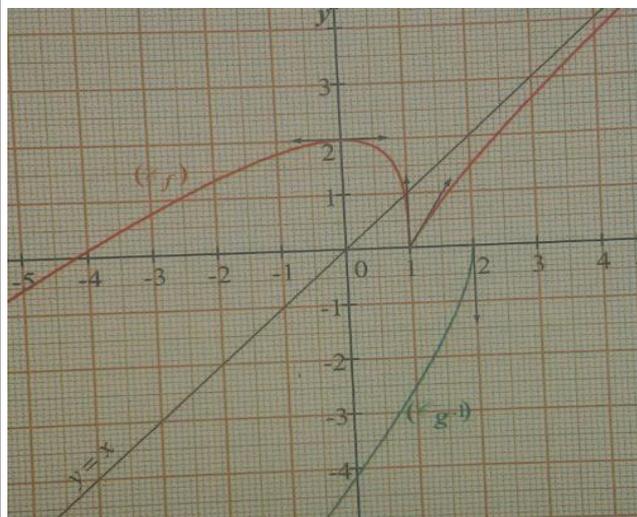
Donc :  $x = 1 - t^3 = -7$  donc :  $g^{-1}(-2) = -7$

Et puisque :  $g'(-7) \neq 0$  alors on a :

$$(g^{-1})'(-2) = \frac{1}{g'(g^{-1}(-2))} = \frac{1}{g'(-7)}$$

Et puisque :  $g'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$

Alors :  $g'(-7) = \frac{3}{4}$  donc :  $(g^{-1})'(-2) = \frac{4}{3}$



**Exercice 12** : soit  $f$  une fonction définie par :

$$f(x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

1) déterminer  $D_f$  ensemble de définition de  $f$

2) montrer que  $f$  est périodique de période

$T = \pi$  et en déduire le domaine d'étude de  $f$

3) déterminer  $f'(x)$  et dresser le tableau de variation de  $f$

4) tracer la courbe  $(C_f)$  sur l'intervalle  $[-\pi; \pi]$

**Solution** : 1)  $D_f = \mathbb{R}$

2) a) si  $x \in \mathbb{R}$  alors  $\pi + x \in \mathbb{R}$

$$b) f(\pi + x) = 2 \cos\left(2(\pi + x) + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos\left(2x + 2\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f(\pi + x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = f(x)$$

Donc :  $f$  est périodique de période  $T = \pi$

Remarque : la fonction :  $x \rightarrow \cos(ax + b)$  est

périodique de période  $T = \frac{2\pi}{|a|}$  si  $a \neq 0$

Un domaine d'étude de  $f$

il suffit d'étudier  $f$  sur un intervalle de longueur  $T = \pi$

donc par exemple :  $D_E = [0; \pi]$

3)  $f'(x)$  et le tableaux de variation de  $f$  ?

$f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$  on a :

$$f'(x) = 2 \times -2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -4 \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Etude du signe de  $f'(x)$  sur  $D_E = [0; \pi]$

$$x \in [0; \pi] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{9\pi}{4}$$

On utilisant le cercle trigo en deduit le signe de

$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ . Le tableau de signe de  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

est :

$2x + \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\pi$	$2\pi$	$\frac{9\pi}{4}$	
$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$	+	0	-	0	+

le tableau

de variation de  $f$  :

$x$	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	$\pi$			
$f'(x)$	-	0	+	0	-		
$f(x)$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	$-2$	$\nearrow$	$2$	$\searrow$	$\sqrt{2}$

4) du tableau de

variation de  $f$  : on deduit que  $f$  change de signe n

sur les intervalles  $\left[0; \frac{3\pi}{8}\right]$  et  $\left[\frac{3\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}\right]$  cad  $(C_f)$

coupe l'axe des abscisses

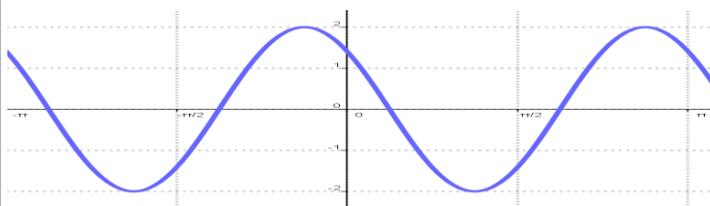
On va résoudre dans  $I = \left[0; \frac{7\pi}{8}\right]$  l'équation :  $f(x) = 0$

$$\text{On a : } \begin{cases} f(x) = 0 \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{9\pi}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ ou } 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{8}$$

On trace la courbe  $(C_f)$  sur l'intervalle  $D_E = [0; \pi]$

Et on déduit le reste par les translations de vecteurs  $k\pi i$   $k \in \mathbb{Z}$



**Exercice 13** : soit  $f$  une fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$$

- déterminer  $D_f$  ensemble de définition de  $f$
- montrer qu'il suffit d'étudier  $f$  sur  $[0; \pi]$
- déterminer  $f'(x)$  et dresser le tableau de variation de  $f$

4) tracer la courbe  $(C_f)$  sur l'intervalle  $[-2\pi; 2\pi]$

**Solution** : 1)  $D_f = \mathbb{R}$  car  $2 + \cos x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) Un domaine d'étude de  $f$

a) si  $x \in \mathbb{R}$  alors  $2\pi + x \in \mathbb{R}$

$$f(2\pi + x) = \frac{\sin(2\pi + x)}{2 + \cos(2\pi + x)} = \frac{\sin x}{2 + \cos x} = f(x)$$

Donc :  $f$  est périodique de période  $T = 2\pi$

il suffit d'étudier  $f$  sur un intervalle de longueur  $T = 2\pi$  donc par exemple :  $D = [-\pi; \pi]$

Étudions la parité de  $f$  ?

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{2 + \cos(-x)} = -\frac{\sin x}{2 + \cos x} = -f(x) \text{ Donc } f \text{ est impair}$$

Donc il suffit d'étudier  $f$  sur  $D_E = [0; \pi]$

3)  $f$  est dérivable sur  $D_E = [0; \pi]$  et  $\forall x \in D_E$

on a :

$$f'(x) = \frac{\cos x (2 + \cos x) + \sin x \times \sin x}{(2 + \cos x)^2} = \frac{2 \cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}$$

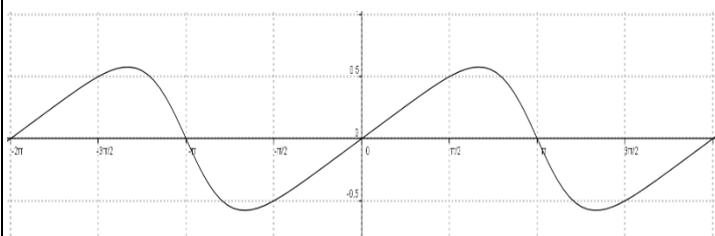
Étude du signe de  $f'(x)$  sur  $D_E = [0; \pi]$

Le signe de  $f'(x)$  est celui de :  $2 \cos x + 1$

$$2 \cos x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq -\frac{1}{2} \quad \text{Et } x \in [0; \pi] \text{ Donc :}$$

$$2 \cos x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$$

$x$	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\pi$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



**Exercice 14** : soit  $f$  une fonction définie par :

$$f(x) = 4 \sin x + \cos 2x$$

- déterminer  $D_f$  ensemble de définition de  $f$
- montrer que  $f$  est périodique de période  $T = 2\pi$  et en déduire le domaine d'étude de  $f$
- déterminer  $f'(x)$  et dresser le tableau de variation de  $f$

4) donner l'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe de  $f$  en  $x_0 = 0$

5) calculer  $f''(x)$  en fonction de  $\sin x$

6) déterminer les points d'inflexions de la courbe  $(C_f)$

7) tracer la courbe  $(C_f)$  sur l'intervalle  $[-2\pi; 4\pi]$

**Solution :** 1)  $D_f = \mathbb{R}$

2) a) si  $x \in \mathbb{R}$  alors  $2\pi + x \in \mathbb{R}$

b)  $f(2\pi + x) = 4\sin(x + 2\pi) + \cos(2(x + 2\pi))$

$f(2\pi + x) = 4\sin x + \cos(2x) = f(x)$

Donc :  $f$  est périodique de période  $T = 2\pi$

Un domaine d'étude de  $f$

il suffit d'étudier  $f$  sur un intervalle de longueur

$T = 2\pi$

donc par exemple :  $D_E = [0; 2\pi]$

$f$  est dérivable sur  $D_E = [0; 2\pi]$  et  $\forall x \in D_E$

on a :  $f'(x) = 4\cos x - 2\sin(2x) = 4\cos x - 4\cos x \sin x$

$f'(x) = 4\cos x(1 - \sin x)$

Etude du signe de  $f'(x)$  sur  $D_E = [0; 2\pi]$

On a :  $1 - \sin x \geq 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x(1 - \sin x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$  ou  $1 - \sin x = 0$

$1 - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$  Donc :

$x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	1	3	-5	1	

4) l'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe de  $f$

en en  $x_0 = 0$  est :  $y = f(0) + f'(0)(x - 0)$

Avec :  $f'(0) = 4$  et  $f(0) = 1$  donc :  $y = 4x + 1$

5) calcule de  $f''(x)$  en fonction de  $\sin x$  :

On a  $f'(x) = 4\cos x - 2\sin(2x)$  Donc :  $\forall x \in \mathbb{R}$

$f''(x) = -4\sin x - 4\cos(2x) = -4\sin x - 4(1 - 2\sin^2 x)$

$f''(x) = 8\sin^2 x - 4\sin x - 4 = 4(\sin^2 x - \sin x - 1)$

Etude du signe de  $f''(x)$  sur  $D_E = [0; 2\pi]$

On pose :  $X = \sin x$  donc :  $X \in [-1; 1]$  et l'équation

$\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$  devient :  $X^2 - X - 1 = 0$

$\Delta = 9$  les solutions sont :  $X_1 = -\frac{1}{2}$  et  $X_2 = 1$

Donc :  $f''(x) = 8(\sin x - 1)\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)$

On a :  $\sin x - 1 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

En utilisant le cercle trigo on déduit que :

$\sin x + \frac{1}{2} \leq 0 \Leftrightarrow \sin x \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$

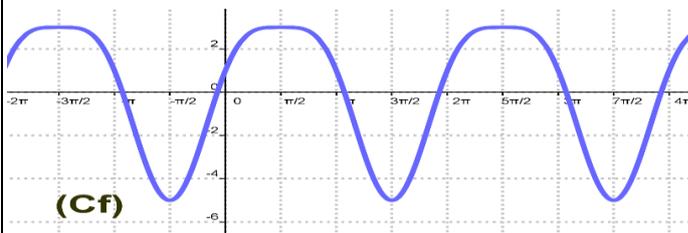
$x$	0	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$	
$f''(x)$	-	0	+	0	-

Donc :  $(C_f)$  est convexe sur  $\left[\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$

$(C_f)$  est concave sur  $\left[0, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$  et  $A\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{3}{2}\right)$

et  $B\left(\frac{11\pi}{6}, -\frac{3}{2}\right)$  sont les points d'inflexions de  $(C_f)$

7) La courbe  $(C_f)$  sur l'intervalle  $[-2\pi; 4\pi]$



*C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe. C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien*

