

Feuille d'exercices : Intégration

Exercice 1 (* à **)

Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} \bullet I_1 &= \int_1^2 \frac{1}{t^2} dt & \bullet I_2 &= \int_e^3 \frac{dx}{x \ln x} & \bullet I_3 &= \int_1^2 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx & \bullet I_4 &= \int_0^2 |x^2 - 3x + 2| dx \\ \bullet I_5 &= \int_0^4 \sqrt{x}(x - 2\sqrt{x}) dx & \bullet I_6 &= \int_0^2 z^4 e^{-z^5} dz & \bullet I_7 &= \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{5}{2}} E(x) dx \\ \bullet I_8 &= \int_1^e \frac{(\ln s)^5}{s} ds & \bullet I_9 &= \int_0^{\frac{\ln 2}{2}} \frac{e^{2t}}{e^{2t} + 2} dt & \bullet I_{10} &= \int_0^2 x^2(x^3 + 1)^{\frac{3}{2}} dx \\ \bullet I_{11} &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\exp(\frac{-3}{v^2})}{v^3} ds & \bullet I_{12} &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1-q}{(q^2 - 2q)^4} dq & \bullet I_{13} &= \int_1^4 \frac{e^{-\sqrt{z}}}{\sqrt{z}} dz \end{aligned}$$

Exercice 2 (**)

Calculer à l'aide d'intégrations par parties les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} \bullet I_1 &= \int_{-1}^1 x e^{3x} dx & \bullet I_2 &= \int_1^4 \sqrt{3s} \ln s ds & \bullet I_3 &= \int_1^e z^2 (\ln z)^3 dz \\ \bullet I_4 &= \int_1^{e^2} (2x^3 + 1) \ln x dx & \bullet I_5 &= \int_0^1 (1 + x + x^2) e^{2x} dx \\ \bullet I_6 &= \int_1^2 \ln \left(1 + \frac{1}{t} \right) dt & \bullet I_7 &= \int_1^2 (1 + 2s) \ln \left(1 + \frac{1}{s} \right) ds \end{aligned}$$

Exercice 3 (**)

Calculer en utilisant le changement de variable indiqué (ou un changement de variable affine si rien n'est indiqué) les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} \bullet I_1 &= \int_0^1 (t-2)(t+1)^5 dt & \bullet I_2 &= \int_0^2 \frac{t^2}{t^3 + 8} dt \quad (\text{poser } u = t^3 + 8) \\ \bullet I_3 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(x+1)} dx \quad (\text{poser } t = \frac{x}{x+1}) \\ \bullet I_4 &= \int_1^2 \frac{ds}{s(s^3 + 1)} \quad (\text{poser } u = s^3 \text{ et calculer } \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u}) \\ \bullet I_5 &= \int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt \quad (\text{poser } u = \sqrt{t}) & \bullet I_6 &= \int_1^e \frac{dt}{t\sqrt{\ln t + 1}} \quad (\text{poser } u = \ln t) \end{aligned}$$

Exercice 4 (* à **)

Donner les primitives de chacune des fonctions suivantes :

$$\bullet f_1 : t \mapsto 1 - 2e^{-t} \quad \bullet f_2 : t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad \bullet f_3 : t \mapsto \frac{\ln t}{t}$$

- $f_4 : t \mapsto \frac{t^2}{t^3 + 2}$
- $f_5 : t \mapsto (t^2 - t + 1)e^{-t}$
- $f_6 : t \mapsto (\ln t)^3$
- $f_7 : t \mapsto \frac{e^{2t}}{e^t + 1}$ (on posera $u = e^t$)
- $f_8 : t \mapsto \frac{\ln t}{t + t(\ln t)^2}$ (on posera $u = \ln t$)

Exercice 5 (*)

Soit f la fonction définie sur $] -3; 2[$ par $f(x) = \frac{3x^2 - 4x - 25}{x^2 + x - 6}$.

1. Montrer qu'on peut écrire f sous la forme $f(x) = a + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+3}$.
2. En déduire l'expression de la primitive de f s'annulant en 1.

Exercice 6 (**)

On considère, $\forall (m, p) \in \mathbb{N}^2$, l'intégrale $I_{m,n} = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$.

1. Calculer $I_{m,0}$ pour toute valeur de m .
2. Établir une relation entre $I_{m,n+1}$ et $I_{m+1,n}$.
3. En déduire une expression simple de $I_{m,n}$.

Exercice 7 (**)

On s'intéresse à la suite d'intégrales définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$.

1. Montrer que la suite (I_n) converge vers 0.
2. Montrer que $I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$.
3. En déduire que $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

Exercice 8 (***)

On définit deux suites d'intégrales de la façon suivante : $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2) dx$ et $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$ (pour $n \geq 1$).

1. Calculer J_1 et montrer que $\forall n \geq 1$, $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$.
2. En déduire la limite de J_n .
3. Montrer à l'aide d'une intégration par partie que $I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}$.
4. En déduire la convergence et la limite de (I_n) .
5. Déterminer un équivalent de I_n .

Exercice 9 (***)

On définit, pour tout entier n , l'intégrale $I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$.

1. Calculer I_1 .
2. Montrer que sur $[1; e]$, on a $(\ln x)^{n+1} \leq (\ln x)^n$, et en déduire le sens de variation de I_n .
3. Montrer que (I_n) est convergente.
4. Montrer que sur $[1; e]$, $0 \leq \ln x \leq \frac{x}{e}$. En déduire la limite de I_n .
5. Montrer que $\forall n \geq 1$, $I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$. En déduire un équivalent de I_n .

Exercice 10 (**)

Dériver chacune des fonctions suivantes :

- $f_1(x) = \int_0^{2x} e^{-3\sqrt{2\ln t}} dt$
- $f_2(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{1+t+t^2} dt$
- $f_3(x) = \int_{-x}^x \sqrt{1+t^2} dt$
- $f_4(x) = \int_{-\sqrt{x}}^{e^x} \frac{t}{\ln t} dt$

Exercice 11 (***)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

1. Montrer que f est dérivable et déterminer sa dérivée. En déduire le tableau de variations de f .
2. On pose désormais $g(x) = f(x) - \ln x$. Étudier les variations de g sur \mathbb{R}_+ et en déduire son signe.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Exercice 12 (***) à (***)

Déterminer les limites de chacune des suites suivantes en utilisant des sommes de Riemann.

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}} \quad w_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 13 (EDHEC 2004) (**)

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt$.

1. Pour tout n appartenant à \mathbb{N} , justifier l'existence de u_n .
2. Calculer u_0 et u_1 .
3. (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ln 2$.

- (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. (a) Pour tout n de \mathbb{N} , écrire $\ln 2 - u_n$ sous la forme d'une intégrale.
- (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ln 2 - u_n \leq \frac{1}{n+1}$.
- (c) Donner la limite de la suite (u_n) .

Exercice 14 (ESCP 92) (****)

Pour tout entier naturel k on considère la fonction f_k définie sur \mathbb{R}^+ par la relation

$$f_k(x) = \int_0^1 t^k e^{-tx} dt$$

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel k , la fonction f_k est décroissante sur \mathbb{R}^+ .
- (b) Etudier la suite $(f_k(0))_{k \geq 0}$. En déduire, pour tout réel positif x , la limite de la suite $(f_k(x))_{k \geq 0}$.
2. (a) Soit $x > 0$. Etablir que $f_{k+1}(x) = \frac{k+1}{x} f_k(x) - \frac{e^{-x}}{x}$ pour tout $k \geq 0$.
- (b) Expliciter les fonctions f_0, f_1 et f_2 .
- (c) Montrer que, $f_0(x) \underset{+\infty}{\sim} 1/x$.
- (d) A l'aide de la relation établie au c), montrer que pour tout $k, f_k(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{k!}{x^{k+1}}$.
3. (a) En effectuant un changement de variable, montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x > 0, f_k(x) = \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^x u^k e^{-u} du$.
En déduire que f_k est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
- (b) Trouver une relation simple entre f'_k et f_{k+1} .
- (c) Montrer que pour tout réel $\forall y \geq 0, 1 - e^{-y} \leq y$. En déduire que pour tout entier naturel k , la fonction f_k est continue en 0. Est-elle dérivable à droite en ce point ?