CALCULS INTEGRALES **: Exercices d'applications**

PROF: ATMANI NAJIB 2BAC SM

TD : CALCULS INTEGRALES

Exercice1 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I=\int_2^4 3x\,dx$ **2)** $J=\int_0^1(2x+3)dx$

3) $K=\int_e^{e^2}\frac{1}{t}dt$ 4) $L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(2\theta)d\theta$

Exercice2 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1=\int_0^2(2x-1)dx$ 2) $I_2=\int_{-1}^1\left(x^4-4x^3+2\right)dx$

3) $I_3=\int_1^2\frac{1}{x^2}dx$ 4) $I_4=\int_0^{\ln 2}e^{2t}dt$

5) $I_5=\int_0^{\sqrt{\ln 2}}te^{-t^2}dt$ 6) $I_6=\int_1^e\frac{\ln^2 x}{x}dx$

7) $I_7=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{e^x+1}dx$ 8) $I_8=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx$

9) $I_9=\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx$ 10) $I_{10}=\int_2^3\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-4}}dx$

11) $I_{11}=\int_0^1\sqrt{2x+1}dx$ 12) $I_{12}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin^3 x\,dx$

13 $I_{13}=\int_1^2\frac{3}{(3x-4)^5}dx$ 14) $I_{14}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2-\cos 3x)dx$

15) $I_{15}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx$ 16) $I_{16}=\int_0^1\left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{2x+1}\right)dx$

17) $I_{17}=\int_1^e\frac{\ln^3 x}{x}dx$ 18) $I_{18}=\int_0^1(x-1)e^{(x-1)^2}dx$

19) $I_{19}=\int_1^2\frac{1}{x(1+\ln x)}dx$ 20) $I_{20}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^2dx$

21) $I_{21}=\int_1^e\frac{8x^9-4x+2}{x}dx$

Exercice3 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I=\int_0^3|x-1|dx$ 2) $J=\int_{-2}^0|x(x+1)|dx$

Exercice4 : on pose: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx$

Calculer $I+J$ et $I-J$ et en déduire I et J

Exercice5 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I=\int_1^3\frac{|x-2|}{\left(x^2-4x\right)^2}dx$ 2) $I=\int_0^{\ln 3}\left|2-e^x\right|dx$

3) $I=\int_0^2\left|x^2-x-2\right|dx$

Exercice 6: Calculer l' intégrale suivante :

$I=\int_0^1\frac{1}{x^2-4}dx$

Exercice7 :on pose : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,dx$

1)montrer que : $\cos^4 x=\frac{1}{8}(\cos 4x+4\cos 2x+3)$

$\forall x\in\mathbb{R}$ (linéarisation de $\cos^4 x$)

2)en déduire l' intégrale I

Exercice8 :d'application Soit f : $x\to e^{-x^2}$

Définie sur R.

Pour tout réel $a\geq 1$, on s'intéresse à l'intégrale $F(a)=\int_1^a f(x)dx$

1)Démontrer que pour tout réel $x\geq 1$:

$0\leq f(x)\leq e^{-x}$.

2) En déduire que pour tout réel $a\geq 1$:

$0\leq F(a)\leq e^{-1}$.

Exercice9 : Montrer que : $\frac{1}{6}\leq I=\int_0^1\frac{x^2}{1+x}dx\leq\frac{1}{3}$

Exercice10 :soit la suite numérique (u_n)définie par : $u_n=\int_0^1\frac{1}{1+x^n}dx\quad\forall n\in\mathbb{N}$

1)Montrer que (u_n)est croissante

2) Montrer que : $\frac{1}{2}\leq u_n\leq 1\quad\forall n\in\mathbb{N}$

Exercice11 : soit la suite numérique (u_n)

définie par : $u_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}dx \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1)Montrer que :

$\forall n\in\mathbb{N} \ \forall x\in[0;1]$: $\frac{e^{nx}}{1+e} \le \frac{e^{nx}}{1+e^x} \le \frac{e^{nx}}{2}$

2) En déduire: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{e^n}\right)$

Exercice12 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $A = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$ 2) $B = \int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x}dx$

3) $C = \int_0^1 2x\sqrt{x^2+1}dx$

Exercice13 : Calculer l' intégrale suivante :

1) $I = \int_0^\pi x\sin x dx$ 2) $J = \int_0^{\ln 2} xe^x dx$

3) $K = \int_1^e \ln x dx$

Exercice14 : En utilisant une intégration par partie calculer :

1) $I = \int_0^1 xe^{2x}dx$ 2) $J = \int_1^{e^3} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

3) $K = \int_0^1 x\sqrt{e^x}dx$ 4) $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$

5) $M = \int_1^e (x\ln x)dx$ 6) $N = \int_1^e \cos(\ln x)dx$

Exercice15 : En utilisant une intégration par partie calculer : $J = \int_0^1 (x-1)e^{-x}dx$

$K = \int_0^1 \ln(1+\sqrt{x})dx$

$M = \int_1^e x(1-\ln x)dx$ $N = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx$

$R = \int_1^e x\ln x dx$ $Q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$

Exercice16: On pose : $I_0 = \int_0^1 \sqrt{x+3}dx$

$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{x+3}dx$

1- a) Calculer I_0

b) Calculer I_1 en utilisant une I.P.P

2- Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.

3- a) En utilisant un encadrement adéquat,

montrer que : $\frac{\sqrt{3}}{n+1} \le I_n \le \frac{2}{n+1}$

b) En déduire la limite de la suite $(I_n)_n$

Exercice17 : En utilisant une intégration par changement de variable.
Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1 = \int_1^3 \frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}}$ on pose $x=\sqrt{t}$

2) $I_2 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{3x}+e^{2x}+3e^x}{1+e^{2x}}dx$ on pose $t=e^x$

3) $I_3 = \int_{e^{-2}}^e \frac{1}{t\sqrt{3+\ln t}}dt$ on pose $x=\ln t$

4) $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx$ on pose $x=\frac{\pi}{4}-t$

Exercice18 : $(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthonormé avec

$\|\vec{i}\| = 2cm$ et Soit f définit par : $f(x)=x^2$

1)tracer C_f la courbe représentative de f
2) calculer S la surface du domaine limité par : Cf, l'axe des abscisses et les droites : $x=1$ et $x=2$

Exercice19 : $(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthogonale avec $\|\vec{i}\| = 2cm$ et $\|\vec{j}\| = 3cm$
Soit f définit par : $f(x)=x^2-2x$
1)tracer Cf la courbe représentative de f
2) calculer S la surface du domaine limité par : Cf, l'axe des abscisses et les droites :
$x=1$ et $x=3$

Exercice20 : $(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthonormé avec

$\|\vec{i}\| = 2cm$ et soit f définit par : $f(x)=1-e^x$

Calculer S la surface du domaine limité par : Cf, l'axe des abscisses et les droites :
$x=\ln 2$ et $x=\ln 4$

Exercice21 : $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ orthonormé avec $\left\|\vec{i}\right\| = 2cm$

Soit f et g deux fonctions tels que:

$f\left(x\right) = \dfrac{2e^x}{e^x+1} + e^{-x}$ et $g\left(x\right) = e^{-x}$

calculer en cm^2 S la surface du domaine limité par : $\left(C_f\right)$; $\left(C_g\right)$ et les droites $x=0$ et $x=\ln 2$

Exercice22 : $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ repère orthonormé avec $\left\|\vec{i}\right\| = 0.5cm$ et Soit f définit par : $f\left(x\right) = x^2 - 8x + 12$

et (D) la tangente à la courbe $\left(C_f\right)$ au point $A\left(3; f(3)\right)$

Calculer A la surface du domaine limité par :
$\left(C_f\right)$ et les droites : (D) et $x=1$ et $x=e$

Exercice 23: $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ repère orthonormé avec $\left\|\vec{i}\right\| = 1cm$ et Soit f définit par : $f\left(x\right) = x - 1 + \dfrac{\ln x}{x}$

Calculer A la surface du domaine limité par :
C_f et les droites : $y = x-1$ et $x=1$ et $x=e$

Exercice24 : $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ repère orthonormé

Soit f et g deux fonctions tels que: $f\left(x\right) = e^{\sqrt{x}}$ et $g\left(x\right) = \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$ Calculer A la surface du domaine limité par : $\left(C_f\right)$; $\left(C_g\right)$ et les droites $x=0$ et $x=1$

Exercice25 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f\left(x\right) = \dfrac{xe^x + x + 1}{e^x+1}$

1) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f et vérifier qu'elle est strictement croissante.
2) Déterminer la surface S_1 du domaine limité par l'axe (Ox) ; la courbe C_f et les droites:
$x = 0$ et $x = 1$.
3) Déterminer la surface S_2 du domaine limité par la droite (Δ) $y = x$; la courbe C_f et les droites:
$x = 0$ et $x = 1$.

Exercice26 : $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ orthonormé avec $\left\|\vec{i}\right\| = 2cm$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f\left(x\right) = \sqrt{x}$

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses entre $a = 0$ et $b = 4$

Exercice27 : $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ orthonormé avec $\left\|\vec{i}\right\| = \dfrac{2}{3}cm$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f\left(x\right) = \sqrt{x\left(e^x - 1\right)}$ et (C) la courbe de f

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses dans l'intervalle $\left[0;1\right]$

Exercice28: $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ orthonormé avec $\left\|\vec{i}\right\| = 2cm$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f\left(x\right) = \sqrt{\ln x}$

et (C) la courbe de f

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses dans l'intervalle $\left[1;e\right]$

Exercice29: $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ orthonormé avec $\left\|\vec{i}\right\| = 2cm$

Soit la fonction f définit par :

$f\left(x\right) = x\sqrt{1 - lnx}$ et (C) la courbe de f

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses dans l'intervalle $\left[1;e\right]$

Exercice30: En utilisant les somme de Riemann calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+k^2}$

Exercice31:
En utilisant les somme de Riemann calculer :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k}$ 2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n-1} \dfrac{1}{n+k}$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+kn}}$

Exercices 32 :

1) Calculer les limites des sommes suivantes :

$$S_1=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n\sqrt{4n^2-k^2}} \quad \text{et} \quad S_2=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n^2+k^2}$$

2) a) Calculer en utilisant une intégration par partie : $\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx$

b) En déduire la limite de la suite :

$$u_n=\frac{1}{n^2}\prod_{k=1}^{n}\left(n^2+k^2\right)^{\frac{1}{n}}$$

(Introduire ln dans l'expression de u_n)

Exercice33: Déterminer la fonction primitive de la fonction lnx qui s'annule en e.

Exercice34: étudier la dérivabilité de la fonction F définit par : $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\ln x} e^{-t^2}dt$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ et calculer $F'(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}^{*+}$

Exercice35: soit la fonction F définit par :

$F(x) = \int_0^{x^2+2x}\sqrt{1+t}\,dt \quad \forall x\in\left[-1;+\infty\right[$

1) Étudier la dérivabilité de la fonction F et calculer $F'(x)$ $\forall x\in\left[-1;+\infty\right[$

2) calculer $F(x)$ sans intégrale

Exercice36: étudier les variations de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_0^x e^{t^2}\left(t^2-4\right)dt$

Exercice37: soit h la fonction définie sur : $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par : $h(x)=\left(1+2x\right)^{\frac{1}{x}}$ si $x\neq 0$

et $h(0)=e^2$

1) Montrer que h est Continue sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ et en déduire que :

$H:x\to\int_0^x h(t)dt$ est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

2) calculer : $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x h(t)dt$

Exercice38: Soit la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par $(\forall t \in]0, +\infty[\,)\ (f(t) = e^{\frac{1}{\ln t}}$

1) Etudier les variations de f sur $]1, +\infty[$.

2) Considérons la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par : $F(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,dt$

a) Montrer que $(\forall x \in]1, +\infty[)$:
$(f(x + 1) \le F(x) \le f(x))$

b) En déduire $\lim_{x\to+\infty} F(x)$

3) a) Montrer que $(\forall t \in]0, +\infty[)(e^t \ge t+1)$

b) En déduire que : $(\forall x > 1)$: ln

$F(x) - 1 \ge \int_x^{x+1}\frac{1}{\ln t}dt$

4)a) Montrer que : $(\forall t \in]0, +\infty[)(\ln t \le t - 1)$

b) En déduire que $(\forall x > 1)(F(x) - 1 \ge \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

c) En déduire $\lim_{x\to1^+} F(x)$

5) Montrer que F est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer $F'(x)$ pour $x > 1$

6) Dresser le tableau de variation de la Fonction F

7) Construire la courbe CF.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien