CALCULS INTEGRALES

PROF : ATMANI NAJIB

2BAC SM

I) INTEGRATION D'UNE FONCTION CONTINUE.

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I ; et F une fonction primitive de f sur I. Le nombre $\boldsymbol{F(b)-F(a)}$ s'appelle l'intégrale de la fonction $\boldsymbol{f}$ entre $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ on écrit :

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)$$

on lit somme $f(x)dx$ de $\boldsymbol{a}$ à $\boldsymbol{b}$ et on l'appelle intégrale de a à b.Le réel a s'appelle la borne inférieure de l'intégrale et le réel b s'appelle la borne supérieure **Remarque :** la variable t est une variable muette, on peut le changer par n'importe qu'elle variable

Propriété1 : Toute fonction continue sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$ c'est-à-dire $\int_a^b f(x)dx$ existe et finie.

Propriété2 : Soient f, g et f' des fonctions continues sur un intervalle I, a, b et c trois éléments de I et α un réel, on a

1) $\int_a^b f'(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)$

2) $\int_a^b \alpha dx = [\alpha x]_a^b = \alpha(b-a)$ 3) $\int_a^a f(x)dx = 0$

4) $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

5) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (Relation de Chasles)

6) $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ (linéarité)

7) $\int_a^b (\alpha f)(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx$ (linéarité)

Intégrales et ordre

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $a \in I$ et $b \in I$ et $a \le b$

1)Si f est positive sur [a ; b], alors $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$

2) Si $(\forall x \in [a;b])$; $f(x) \le g(x)$ alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

3) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

II) LA VALEUR MOYENNE ET THEOREME DE LA MEDIANE

si f est une fonction continues sur un intervalle I et $a \in I$ et $b \in I$ et $a \le b$ alors il existe au moins un réel c dans [a ; b].Tel que : $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ S'appelle La valeur moyenne de f sur [a ; b]

III)TECHNIQUES DE CALCULS D'UNE INTEGRALE.

1) L'utilisation directe des fonctions primitives :

La fonction	Sa fonction primitive
$\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x + c$
$x^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}}$
$x^r \ (r \in \mathbb{Q}/\{-1\})$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1} + c$
$sin(ax+b)$	$\frac{-1}{a}cos(ax+b) + c$
$cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}sin(ax+b) + c$
$\frac{a}{1+x^2}$	$a \times arctan(x) + c$

La fonction	Sa fonction primitive
$u' + v'$	$u + v + C^{te}$
$\alpha u'$	$\alpha u + C^{te}$
$u'u^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + C^{te}$
$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{-1}{u} + C^{te}$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u} + C^{te}$
$u'\sqrt[n]{u} \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{n}{n+1}\sqrt[n]{u^{n+1}} + C^{te}$
$u'u^r \ (r \in \mathbb{Q}/\{-1\})$	$\frac{1}{r+1}u^{r+1} + C^{te}$
$u' \times v'ou$	$vou + C^{te}$
$\frac{u'}{u^2+1}$	$arctan(u) + C$

La ligne en couleur gaune est une généralisation des 4 lignes précédentes.

2)Intégration par partie :

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et u' et v' sont continue sur I et soient a et b deux éléments de l'intervalle I on a :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

3) Intégration par changement de variable :

Soient g une fonction dérivable sur $[a, b]$ telle que g' continue sur $[a, b]$ et f une fonction continue sur g $([a, b])$ on a :

$$\int_a^b (f\circ g)(t).g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x).dx$$

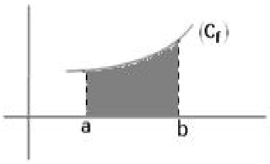
Cette propriété s'appelle propriété du changement de variable.

IV) INTEGRALE ET SURFACE.

1)Soit f une fonction continue sur un intervalle [a ; b] l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine situé entre la courbe Cf, l'axe des abscisses et les droites d'équation :

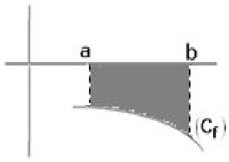
x = a et x = b est : $A(\Delta_f) = \int_a^b |f(x)|dx \ ua$

2)Si si f une fonction continue et positif sur [a ; b]



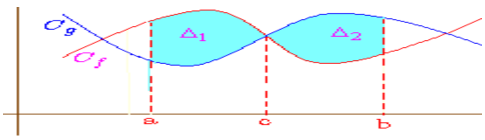
$$A(\Delta_f) = \int_a^b f(x)dx.ua$$

3) si f une fonction continue et négatif sur [a ; b]



$$A(\Delta_f) = -\int_a^b f(x)dx.ua$$

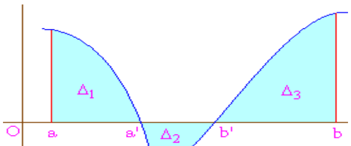
4)Si on a par exemple :



$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

$$S = \int_a^c (f(x) - g(x))dx + \int_c^b (g(x) - f(x))dx$$

5) Si on a par exemple :



$$A(\Delta) = \int_a^{a'} f(x)dx + \int_{a'}^{b'} -f(x)dx + \int_{b'}^{b} f(x)dx$$

V) INTEGRALE ET CALCUL DES VOLUMES

Propriété1 : Soit (S) un solide compris entre les plans $Z = a$ et $z = b$

le volume par unité de volume du solide (S) est :

$V_{(S)} = \int_a^b S(t)dt$ Où $S(t)$ est la surface de l'intersection du solide S et du plan $z = t$

Propriété2 : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

La rotation de la courbe (C_f) au tour de l'axe des abscisses engendre un solide de volume $V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx$ $u.v$ (par unité de volume)

si le repere est : $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ $u.v = \|\vec{i}\|\|\vec{j}\|\|\vec{k}\|$

VI) SOMMES DE RIEMANN

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$; $a \prec b$

On pose : $s_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ et

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

Les sommes s_n et S_n s'appelle les somme de Riemann.

Les suites $(s_n)_n$ et $(S_n)_n$ sont convergentes et

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$$

VII) DERIVATION DE $\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$

1) Soit f une fonction continue sur I et $a \in I$; la fonction F définie par :

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la fonction primitive de la fonction f qui s'annule en a. La fonction F est dérivable sur I et $(\forall x \in I)$ $(F'(x) = f(x))$

2) Dérivée de la fonction $\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$

Soit f une fonction continue sur un intervalle J

u et v deux fonctions définie, dérivable sur I telles que : $u(I) \subset J$ et $v(I) \subset J$. La fonction $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ est dérivable sur I

et :$(\forall x \in I)(F'(x) = v'(x) \times f(v(x)) - u'(x) \times f(u(x))$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien