Exercices d'applications et de réflexions *sur L'ARITHMETIQUE*

PROF : ATMANI NAJIB 2ème BAC Sciences maths

TD : L'ARITHMETIQUE

Exercice1 : montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$;
1) $(3n+1)\wedge(7n+2)=1$, 2)$5n$ + 3) ∧ ($2n$ + 1) = 1
3)n + 2) ∧ (n^2 + $2n$ − 1) = 1

Exercice2 : Montrons que : 360 ∧ 84 = 12 et déterminer u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que :
360u + 84v = 12

Exercice3 : Considérons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E): 17x + 36y = 1 et déterminons une solution particulière de (E).

Exercice4 : résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante : $(E)\ \ 7(x-2)=3(y+1)$

Exercice5 : déterminer l'entier naturel n tel que : $\frac{n(n^2+3n-2)}{n+1}\in\mathbb{N}$

Exercice6: 1)Montrer que : $\forall a\in\mathbb{Z}^*$ et $\forall b\in\mathbb{Z}^*$

on a : $a\wedge b=1 \Rightarrow \begin{cases} a\wedge(a+b)=1 \\ b\wedge(a+b)=1 \\ a\wedge b(a+b)=1 \\ (a+b)\wedge ab=1 \end{cases}$

Exercice7 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$
$(2n+5)\wedge(n^2+5n+6)=1$

Exercice8 : Considérons l'équation :
(E): 756x − 245y = 14
1- Montrer l'équation (E) admet une solution.
2- Déterminer une solution particulière de (E)
3- Résoudre l'équation (E)

Exercice9 : déterminer dans $\mathbb{N}^2$ les couples $(x;y)/\begin{cases} x+y=48 \\ x\wedge y=4 \end{cases}$ avec $x\le y$

Exercice10: résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système suivant: $\begin{cases} 2x\equiv 3[7] \\ 3x\equiv 1[5] \end{cases}$

Exercice11: montrer que l'ensemble des solutions du système suivant est non vide :
$\begin{cases} n\equiv 2[11] \\ n\equiv 3[7] \end{cases}$

Exercice12: résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante: $(E)\quad 5x-3y=1$

Exercice13 : Montrons que : (∀n ≥ 2) : $n^5\equiv n[30]$

Exercice14 :
1) Montrer pour tout entier naturel n, non nul : n^3-n est divisible par 3.
2) Soit p un nombre premier différent de 2, démontrer que $N=\sum_{k=0}^{p-2}2^k$ est divisible par p .

Exercice15 : Le corollaire du théorème de Fermat affirme :
Pour tout entier naturel a et tout nombre Premier p, on a: $a^p\equiv a[p]$
La réciproque est-elle vraie ?
C'est à dire si pour tout entier naturel a , on a $a^p\equiv a[p]$ (avec p entier naturel supérieur ou égal à 2) alors a-t-on p premier ?
On se propose de donner un contre-exemple.
1. Décomposer 561 en produit de facteurs premiers.
2. Démontrer que si x est un entier alors, pour tout n∈ℕ*, (x^n-1) est un multiple de (x−1)
3. Démontrer que $a^{561}-a$ est divisible par 3 puis par 11, puis par 17.
4. En déduire que pour tout entier naturel a :
$a^{561}-a\equiv 0[561]$

Exercice 16:soit p un nombre premier positif et $a\in\mathbb{N}^*$ et $p\wedge a=1$ on pose $F_p(a)=\frac{a^{p-1}-1}{p}$
1)verifier que : $F_p(a)\in\mathbb{N}$
2) soit $b\in\mathbb{N}^*$ tel que : $p\wedge b=1$
Démontrer que : $F_p(ab)\equiv F_p(a)+F_p(b)[p]$

Exercice17 :soit $n\in\mathbb{Z}$ on pose :
$u_n=5n^7+7n^5+23n$
1) Démontrer que : $u_n\equiv 0[5]$
2) Démontrer que : $u_n\equiv 0[7]$
3)en déduire que : $\frac{n^7}{7}+\frac{n^5}{5}+\frac{23n}{35}\in\mathbb{Z}$

Exercice18 : Considérons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E): $x^4+781=3y^4$
1)monter que : $\forall x\in\mathbb{Z}$: $x^4\equiv 1[5]$ ou $x^4\equiv 0[5]$
2) monter que : $\forall x\in\mathbb{Z}$: $x^4+781\equiv 2[5]$
Ou $x^4+781\equiv 1[5]$

3) en déduire les solutions de l'équation(E)
Exercice19 :soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante:
(E) : $36x-25y=5$
1)montrer que si $(x;y)$ est une solution de l'équation(E) alors x est un multiple de 5
2)déterminer une solution particulière de l'équation(E)et résoudre (E)
3) soit $(x;y)$ une solution de l'équation(E)
Et $x \wedge y = d$ .Déterminer les valeurs possibles de d et Déterminer les solutions $(x;y)$de (E) tel que $x \wedge y = 1$
Exercice20: on pose $A = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$
1)soit $a \in A$ discuter suivant a le nombre de solutions de l'équation : (E) $x^2 = a$ dans A
2)soient p et q deux éléments de A
On considére l'équation : (F) $x^2 - \bar{2}px + q = \bar{0}$
Montrer que l'équation : (E)admet une solution ssi $p^2 - q$ appartient à un ensemble B à déterminer
3)application :
a)résoudre dans A l'équation: $x^4 + \bar{3}x^2 + \bar{4} = \bar{0}$ (G)
b)déterminer les nombres entiers naturels b
Tels que : 11 divise $\overline{10304}_{(b)}$
Exercice21 : On suppose qu'il existe des entiers naturels non nuls m , n et a tels que:
(4 m+ 3)(4 n+ 3)=4 a^2+ 1
1) Soit p un nombre premier quelconque divisant 4 m+ 3 .
Montrer que p est impair et que :
$(2a)^p - 1 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} [p]$
2) En utilisant le théorème de Fermat, montrer que : $p \equiv 1[4]$
3. En utilisant la décomposition de 4 m+ 3 en facteurs premiers obtenir une contradiction
Exercice22 : Démontrer que pour tout entier naturel non nul n on a N=n^{13}−n est divisible par 13; 7; 5; 3 et 2.
Exercice23 : Soit Le nombre $n = \overline{2987}_{(10)}$
Écrire n dans la base 6 :
Exercice24 :soit $N = \overline{dcba}_{(10)}$ un entier naturel
montrer que : $N \equiv a - b + c - d[11]$
Exercice25 : calculer :
$\overline{2534}_{(7)} + \overline{631}_{(7)}$
Exercice26: calculer
1) $\overline{327}_{(8)} \times \overline{56}_{(8)}$ 2) $\overline{432}_{(5)} \times \overline{134}_{(5)}$
Exercice27 : effectuer dans la base 9
$\overline{6432}_{(7)} \times \overline{54}_{(8)}$
Exercice28 : monter que
1) $x \equiv 0$ [5] ⇔ a_0 = 0 ou a_0 = 5
2) $x \equiv 0$ [25] ⇔ $\overline{a_1a_0} \in \{0,25,50,75\}$
3) $x \equiv 0$ [3] ⇔ $\sum_{i=0}^{n} a_i \equiv 0$ [3]
4) $x \equiv 0$ [9] ⇔ $\sum_{i=0}^{n} a_i \equiv 0$ [9]
5) $x \equiv 0$ [11] ⇔ $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i \equiv 0$ [11]
6) $x \equiv 0$ [4] ⇔ $\overline{a_1a_0} \equiv 0$ [4]
Exercice29 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$
où $(a_n;b_n) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$
Montrer que : $a_n \wedge b_n = 1$
Exercice30 :1) Montrer que $\forall (k;n) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$
$kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ et $(n+1)C_{2n}^{n-1} = nC_{2n}^n$
2) Montrer que $\forall (k;n) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$
$k \wedge n = 1 \Rightarrow n / C_n^k$
3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $n+1 / C_{2n}^n$
Exercice 31 : Pour $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$
(Nombres de Fermat). Montrer que les nombres de Fermat sont deux à deux premiers entre eux.
Exercice 32 :
1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $6 / 5n^3 + n$
2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $7 / 4^{2^n} + 2^{2^n} + 1$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien