

## arithmétique

### EXERCICE 1

Soit  $n$  de  $\mathbb{N}$ . On considère les entiers :

$$a = n^4 - n^2 + 1 \text{ et } b = n^4 + n^2 + 1$$

- 1) vérifier que  $a$  et  $b$  sont impairs
- 2) soit  $d$  un diviseur commun de  $a$  et  $b$

Montrer que  $d \mid 2n^2$  et  $d \mid 2(n^4 + 1)$

- 3) montrer que  $n^2 \wedge (n^4 + 1) = 1$
- 4) déduire  $a \wedge b$

### EXERCICE 2

Soit  $n$  un entier naturel. on pose :

$$a = n^3 - n^2 - 12n \text{ et } b = 2n^2 - 7n - 4$$

- 1) vérifier que  $n - 4 \mid a$  et  $n - 4 \mid b$
- 2) on considère les nombres  $a' = 2n + 1$  ;  $b' = n + 3$  et soit  $d$  un diviseur commun de  $a'$  et  $b'$

- a) montrer que  $d \mid 5$
- b) montrer que  $(5 \mid n - 2) \Leftrightarrow (5 \mid a' \text{ et } 5 \mid b')$
- 3) montrer que  $n \wedge (2n + 1) = 1$
- 4) déterminer suivant  $n$  le pgcd de  $a$  et  $b$

### EXERCICE 3

- 1) Montrer que 137 est un nombre premier
- 2) soit  $p$  un nombre premier et  $p > 3$

- a) montrer que  $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$
- b) montrer que  $2^p \equiv 2 \pmod{3}$
- c) déduire que  $2^p + p^2$  n'est pas premiers

### EXERCICE 4

pour tout entier naturel  $n$  on pose  $U_n = 2^n + 5^n$

- 1) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) U_{n+2} = 7U_{n+1} - 10U_n$
- 2) montrer que tout diviseur commun de  $U_n$  et  $U_{n+1}$  divise  $3 \times 2^n$  et  $3 \times 5^n$
- 3) montrer que  $U_n$  et  $U_{n+1}$  sont premiers entre eux

### EXERCICE 5

Soit  $n$  un entier de  $\mathbb{N}$ . on pose  $d = n(n^2 + 5)$

- 1) montrer que  $n$  est pair
- 2) montrer que  $3 \mid d$
- 3) déduire  $(\forall n \in \mathbb{N}) n^3 \equiv n \pmod{6}$

### EXERCICE 6

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers de  $\mathbb{N}^* - \{1\}$ .

Montrer que  
si  $a^n - b^n$  est premier alors  $n$  est premier

### EXERCICE 7

soit  $n$  un élément de  $\mathbb{N}$ .

on considère dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation :

$$(x - 2n)(y - 2n) = 2n^2$$

on pose  $\delta = (x - 2n) \wedge (y - 2n)$

- 1) montrer que  $\delta^2 \mid 2n^2$  et  $\delta \mid (x \wedge y)$
- 2) montrer que  $x^2 + y^2 = (x + y - 2n)^2$   
puis déduire que  $(x \wedge y) \mid \delta$
- 3) montrer que  $(x \wedge y) \mid n$

### EXERCICE 8

Pour tout entier naturel  $n$  on pose :

$$a_n = 4 \times 10^n - 1 \quad ; \quad b_n = 2 \times 10^n - 1 \text{ et}$$

$$c_n = 2 \times 10^n + 1$$

- 1) calculer  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3$  et  $c_3$
- 2) montrer que  $a_n$  et  $c_n$  sont divisible par 3
- 3) montrer que  $b_3$  est premier
- 4) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) b_n \times c_n = a_{2n}$
- 5) déduire une décomposition en facteur premier du nombre  $a_6$
- 6) montrer que  $b_n \wedge c_n = b_n \wedge 2$   
En déduire le pgcd de  $b_n$  et  $c_n$

### EXERCICE 9

On considère dans  $\mathbb{N}$  le système  $(S) \begin{cases} x \equiv 5 \pmod{8} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$

- 1) a) vérifier que  $(2, -5)$  est une solution de l'équation  $(E) : 8X + 3Y = 1$   
b) Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation  $(E)$
- 2) soit  $(a, b)$  une solution de  $(E)$ .  
montrer que  $p = 2 \times 8a + 5 \times 3b$  est solution de  $(S)$
- 3) soit  $n_0$  une solution de  $(S)$   
a) montrer que :  
si  $x \equiv n_0 \pmod{24}$  alors  $x$  solution de  $(S)$   
b) déterminer les solutions de  $(S)$