

# L'ARITHMETIQUE

## 1) REPPEL

### 1) Divisibilité dans $\mathbb{Z}$ .

#### Définition :

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs tels que  $b \neq 0$  ; on dit que l'entier relatif  $b$  divise  $a$  s'il existe un entier relatif  $k$  tel que  $a = kb$  ; on écrit :  $b|a$ .

On dit que  $a$  est divisible par  $b$  ou  $a$  est un multiple de  $b$

#### Définition :

- Si  $b|m$  et  $b|n$  on dit que  $b$  est un diviseur commun de  $m$  et  $n$
- Si  $b|m$  et  $b'|m$ , on dit que  $m$  est un multiple commun de  $b$  et  $b'$ .

#### Propriété :

Etant donnés des entiers relatifs non nuls. On a les assertions suivantes :

- ①  $\begin{cases} a|b \\ b|a \end{cases} \Rightarrow |a| = |b|$
- ②  $\begin{cases} a|b \\ b|c \end{cases} \Rightarrow a|c$
- ③  $\begin{cases} a|m \\ a|n \end{cases} \Rightarrow a|\alpha m + \beta n$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des entiers relatifs quelconques.

#### Application :

Soient  $a_n = 2n + 1$  et  $b_n = 5n + 4$

1- Montrer que tout diviseur commun de  $a_n$  et  $b_n$  divise 3.

2- Déterminer tous les diviseurs communs de  $a_n$  et  $b_n$

#### Propriété :

- ①  $\begin{cases} d|a \\ \delta|b \end{cases} \Rightarrow d\delta|ab$
- ②  $a|b \Leftrightarrow a^n|b^n$
- ③  $\begin{cases} d|a \\ d|a+b \end{cases} \Rightarrow d|b$

## 2) Division Euclidienne

#### Propriété :

Considérons  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs tels que  $b \neq 0$  ils existent un entiers relatif  $q$  et un entier naturel  $r$  tels que :  $a = bq + r$  où  $0 \leq r < |b|$

- L'entier  $a$  s'appelle : **Le divisé**
- L'entier  $b$  s'appelle : **Le diviseur**
- L'entier  $q$  s'appelle : **Le quotient**
- L'entier  $r$  s'appelle : **Le reste**

#### Exercice 1 :

Montrer que le reste de la division euclidienne de  $n^2$  par 3 ne peut pas être égale à 2.

#### Exercice 2 :

a) Montrer que tout nombre premier s'écrit de la forme  $p = 6n + 1$  ou  $p = 6n + 5$

b) L'inverse est-il vraie ?

## 3) Les nombres premiers

#### Définitions

- On dit que l'entier  $d$  est un diviseur **effectif** de l'entier relatif  $a$  si  $d|a$  et  $|d| \neq 1$  et  $|d| \neq |a|$
- On dit qu'un entier relatif non nul  $p$  est **premier** s'il est différent de 1 et s'il n'admet pas de diviseurs effectifs.

#### Remarque :

- Un nombre premier  $p$  admet exactement deux diviseurs positifs 1 et  $|p|$ .

- Si  $p$  est un nombre premier positif alors  $p$  n'admet pas de diviseurs effectifs de même  $-p$  n'admet pas de diviseurs effectif d'où :  $-p$  est aussi premier ;  
Pour l'étude des nombres premiers on se contente d'étudier les nombres premiers positifs.

**Propriété :**

Soit  $a$  un entier naturel non nul différent de 1 et non premier, le plus petit diviseur de  $a$  différent de 1 est un nombre premier

**Propriété :**

Soit  $n$  un entier naturel non nul, différent de 1 et non premier, il existe un nombre premier  $p$  qui divise l'entier  $n$  et qui vérifie  $p^2 \leq n$ .

**Remarque :**

Cette propriété nous permet de déterminer si un nombre est premier ou non.

**Corolaire :**

Si un entier  $n$  n'est divisible par aucun entier premier  $p$  et qui vérifie  $p^2 \leq n$  alors  $n$  est premier.

**Crible d'Eratosthène.** Les nombres premiers inférieurs à 100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

**Application :** Montrer que le nombre 2003 est premier.

**Théorème :**

L'ensemble des nombres premiers est infini.

**4) Plus grand diviseurs commun****Définition :**

On dit que le nombre  $d$  est le **plus grand diviseur commun** de deux entiers relatifs  $a$  et  $b$  lorsque  $d$  divise  $a$  et  $d$  divise  $b$  et qu'il n'y a pas d'autre plus grands diviseurs de ces deux nombres. On note  $d = PGDC(a, b) = a \wedge b$

**Propriétés :**

- $a \wedge a = |a|$
- $1 \wedge a = 1$
- $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
- Si  $b|a$  alors  $a \wedge b = |b|$
- $\begin{cases} d|a \\ d|b \end{cases} \Rightarrow d|(a \wedge b)$
- $a \wedge b = a \wedge (a - b)$

**Exercice :**

- 1- Montrer que tout diviseur commun de  $a = 2n + 3$  et  $b = 5n + 1$  est un diviseur de 13
- 2- Déterminer tous les diviseurs commun de  $a$  et  $b$ .
- 3- Déterminer les valeurs de  $n$  pour lesquels  $a \wedge b = 13$ .

**Définition :**

On dit que deux entiers relatifs  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux si  $a \wedge b = 1$ .

**5) L'algorithme d'Euclide.****Théorème :**

Soit  $a$  un entier naturel et  $b$  un entier naturel non nul on a :  $a = bq + r$  où  $0 \leq r < b$  on a :  $a \wedge b = b \wedge r$

**L'algorithme d'Euclide.**

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels ( $b \neq 0$ ) on a :

$$a = bq_1 + r_1 \text{ si } r_1 \neq 0 \text{ alors :}$$

$$b = r_1q_2 + r_2 \text{ si } r_2 \neq 0 \text{ alors :}$$

$$r_1 = r_2q_3 + r_3 \text{ si } r_3 \neq 0 \text{ alors :}$$

.....

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n \text{ si } r_n \neq 0 \text{ alors :}$$

$$r_{n-1} = r_nq_{n+1} + r_{n+1} \text{ si } r_{n+1} = 0 \text{ on arrête le processus.}$$

Et d'après la propriété précédente :  $a \wedge b = b \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2 = \dots = r_{n-1} \wedge r_n = r_n$  car :  $r_n | r_{n-1}$

**Propriété :**

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls.

Le plus grand diviseur commun de  $a$  et  $b$  est le dernier reste non nul dans les divisions euclidiennes successives.

**Application :**

1- Trouver le PGDC(362154, 82350).

2- Déterminer tous les diviseurs communs de 362154 et 82350.

**Propriété :**

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs non nuls et  $\delta = a \wedge b$ , on a les diviseurs communs de  $a$  et  $b$  sont les diviseurs de  $\delta$ . On peut dire que :  $\mathcal{D}_a \cap \mathcal{D}_b = \mathcal{D}_{a \wedge b}$

**6) Le plus petit multiple commun.****Définition :**

On dit que le nombre entier naturel  $m$  est le **plus petit multiple commun** de deux entiers relatifs  $a$  et  $b$  lorsque  $m$  est un multiple de  $a$  et de  $b$  et qu'il n'y a pas d'autre plus petit multiple non nuls de ces deux nombres. On note :  $m = PPCM(a, b) = a \vee b$

**Propriétés :**

- $a \vee a = |a|$
- $a \vee b = b \vee a$
- $a \vee 1 = |a|$
- Si  $b|a$  alors  $a \vee b = |a|$
- $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$
- $a|(a \vee b)$  ;  $b|(a \vee b)$  et  $(a \vee b)|ab$

**Propriété :**

Considérons  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs.

Si  $a \vee b = m$  et  $M$  un multiple commun de  $a$  et  $b$  alors  $m|M$ .

**7) la congruence modulo  $n$ .****Définition :**

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs ; et  $n$  un entier naturel non nul. on dit que :  $a$  est congrue à  $b$  modulo  $n$  si  $n|(b - a)$ . On écrit :  $a \equiv b \pmod{n}$

**Propriété :**

Si  $a \equiv b \pmod{n}$  alors  $a$  et  $b$  ont le même reste de la division euclidienne sur  $n$

**Propriété fondamentale :**

- $(\forall a \in \mathbb{Z})(a \equiv a \pmod{n})$  on dit que la relation de congruence est **réflexive**.
- $(\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2)(a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow b \equiv a \pmod{n})$ , on dit que la relation de congruence est **symétrique**.
- $(\forall (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3) \left( \begin{matrix} a \equiv b \pmod{n} \\ b \equiv c \pmod{n} \end{matrix} \Rightarrow a \equiv c \pmod{n} \right)$ , on dit que la relation de congruence est **transitive**.

**Définition :**

Puisque la relation de congruence est réflexive, symétrique et transitive on dit que la relation de congruence est une **relation d'équivalence**

**Propriété et définition :**

Soit  $n$  un entier naturel non nul. Si  $a \equiv b \pmod{n}$  et  $c \equiv d \pmod{n}$  alors ;

- $a + c \equiv b + d \pmod{n}$  ; On dit que la relation de congruence est compatible avec l'addition dans  $\mathbb{Z}$
- $ac \equiv bd \pmod{n}$  ; On dit que la relation de congruence est compatible avec la multiplication dans  $\mathbb{Z}$

**Corolaire :**

Si  $a \equiv b \pmod{n}$  alors pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}$  on a :  $a^k \equiv b^k \pmod{n}$

**Applications**

- 1 Déterminer le reste de la division euclidienne de  $4587^{2018}$  par 9
- 2 Déterminer le reste de la division euclidienne de  $25614^{6512}$  par 13
- 3 Montrer que pour tout  $n$  entier naturel :  $3^{2n+1} + 2^{n+2}$  est divisible par 7
- 4 Montrer que pour tout  $n$  entier naturel,  $5n^3 + n$  est divisible par 6
- 5 Montrer que si  $n$  n'est pas un multiple de 7, alors :  $n^6 - 1$  est un multiple de 7
- 6 Montrer que pour tout entier naturel, le nombre  $n(n^2 + 5)$  est divisible par 6

**8) Les classes d'équivalences.****Définition :**

Soit  $n$  un entier naturel non nul. L'ensemble des entiers relatifs qui ont le même reste  $r$  de la division euclidienne par  $n$  s'appelle **la classe d'équivalence de  $r$**  et se note :  $\bar{r}$  ou  $\dot{r}$

$$\bar{r} = \{m \in \mathbb{Z} / m \equiv r \pmod{n}\} = \{nk + r \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}$$

**Définition :**

Soit  $n$  un entier naturel non nul. On définit dans  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  les deux lois :

- **L'addition** : On pose :  $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$
- **La multiplication** : On pose :  $\bar{a} \times \bar{b} = \overline{a \times b}$

**Exemple :**

Dans  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  :  $\bar{3} \times \bar{4} = \bar{0}$      $\bar{5} + \bar{4} = \bar{3}$

**Exercice :**

1- Dresser les tables des opérations de  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

2- Résoudre dans  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$  les équations :

a)  $\bar{2}x = \bar{1}$     b)  $\bar{4}x + \bar{1} = x + \bar{3}$     c)  $\bar{5}x^2 + \bar{3}x + \bar{1} = \bar{0}$

**9) Décomposition d'un entier en facteurs des nombres premiers****Théorème :**

- Chaque entier **naturel**  $m$  non nul s'écrit d'une façon unique comme le produit des facteurs premiers comme suite :  $m = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_n^{\alpha_n} = \prod_{k=1}^n p_k^{\alpha_k}$
- Chaque entier **relatif**  $m$  non nul s'écrit d'une façon unique comme le produit des facteurs premiers comme suite :  $m = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_n^{\alpha_n} = \varepsilon \prod_{k=1}^n p_k^{\alpha_k}$  où  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$

**Propriété 1:**

Soit  $a$  un entier relatif dont la décomposition est de la forme :  $a = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_n^{\alpha_n}$  ; un entier  $d$  non nul divise l'entier  $a$  si et seulement si  $d$  à une décomposition de la forme :

$$d = \varepsilon' p_1^{\delta_1} \times p_2^{\delta_2} \times p_3^{\delta_3} \times \dots \times p_n^{\delta_n} \text{ où } (\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket)(0 \leq \delta_i \leq \alpha_i)$$

Soit  $a$  un entier relatif dont la décomposition est de la forme :  $a = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_n^{\alpha_n}$  et

$d = \varepsilon' p_1^{\delta_1} \times p_2^{\delta_2} \times p_3^{\delta_3} \times \dots \times p_n^{\delta_n}$  un diviseur de  $a$  le nombre des valeurs possibles de  $\delta_i$  est  $\alpha_i + 1$

On en déduit que :

**Propriété 2:**

Si  $a = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_n^{\alpha_n}$  est un entier, le nombre des diviseurs de  $a$  est :  $2(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1)$

**Application :**

1- Décomposer le nombre 2975 en facteurs des nombres premiers

2- Déterminer le nombre des diviseurs de 2975.

3- Déterminer tous les diviseurs positifs de 2975.

**Propriété 3 :**

Soit  $a$  un entier relatif dont la décomposition est de la forme :  $a = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_n^{\alpha_n}$  ; un entier  $m$  est un multiple de  $a$  si et seulement si  $m = \varepsilon' p_1^{\mu_1} \times p_2^{\mu_2} \times p_3^{\mu_3} \times \dots \times p_n^{\mu_n}$  où  $(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket)(\alpha_i \leq \mu_i)$

**9.1 Le P.G.C.D de deux nombres.**

Soient  $a = \varepsilon \prod_{k=1}^n p_k^{\alpha_k}$  et  $b = \varepsilon' \prod_{k=1}^n p_k^{\beta_k}$  deux entiers ; si  $d = \varepsilon'' \prod_{k=1}^n p_k^{\delta_k}$  est un diviseur commun de  $a$  et  $b$  alors :

$$(\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket) \begin{cases} 0 \leq \delta_k \leq \alpha_k \\ 0 \leq \delta_k \leq \beta_k \end{cases}$$

On en déduit que le P.G.C.D ( $a, b$ ) est l'entier  $\delta = \prod_{k=1}^n p_k^{\delta_k}$  où  $(\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket)(\delta_k = \inf(\alpha_k, \beta_k))$

**Propriété :**

Si  $a = \varepsilon \prod_{k=1}^n p_k^{\alpha_k}$  et  $b = \varepsilon' \prod_{k=1}^n p_k^{\beta_k}$  deux entiers alors  $a \wedge b = \prod_{k=1}^n p_k^{\inf(\alpha_k, \beta_k)}$

**Exercice :**

1- Décomposer les nombres 362154 et 82350 en produit des facteurs premiers

2- Déterminer le P.G.C.D de 362154 et 82350

3- Déterminer tous les diviseurs communs de 362154 et 82350

**9.2 Le P.P.C.M de deux nombres.**

Soient  $a = \varepsilon \prod_{k=1}^n p_k^{\alpha_k}$  et  $b = \varepsilon' \prod_{k=1}^n p_k^{\beta_k}$  deux entiers ; si  $m = \varepsilon'' \prod_{k=1}^n p_k^{\mu_k}$  est un multiple commun de  $a$  et  $b$  alors :

$$(\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket) \begin{cases} \alpha_k \leq \mu_k \\ \beta_k \leq \mu_k \end{cases}$$

On en déduit que le P.P.C.M ( $a, b$ ) est l'entier  $\mu = \prod_{k=1}^n p_k^{\mu_k}$  où  $(\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket)(\mu_k = \sup(\alpha_k, \beta_k))$

**Propriété :**

Si  $a = \varepsilon \prod_{k=1}^n p_k^{\alpha_k}$  et  $b = \varepsilon' \prod_{k=1}^n p_k^{\beta_k}$  deux entiers alors  $a \vee b = \prod_{k=1}^n p_k^{\sup(\alpha_k, \beta_k)}$

**Propriété :**

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs non nuls, on a les assertions suivantes :

- $(a \wedge b) \times (a \vee b) = |ab|$
- $ca \vee cb = c(a \vee b)$
- $ca \wedge cb = c(a \wedge b)$

**Exercice :**

Si  $d|a$  et  $d|b$  alors :  $d|(a \wedge b)$ .

**II) THEOREMES PRINCIPAUX.**

**1) Théorème de Bézout :**

**Théorème 1 :**

Soient  $a$  et  $b$  et des entiers relatifs non nuls :

$$a \wedge b = d \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 ; \begin{cases} a = \alpha d \\ b = \beta d \\ \alpha \wedge \beta = 1 \end{cases}$$

**Preuve :**

( $\Rightarrow$ ) On suppose que  $a \wedge b = d$

On a  $d|a$  et  $d|b$  donc  $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$  tel que :  $a = \alpha d$  et  $b = \beta d$  donc :

$$\begin{aligned} d &= \alpha d \wedge \beta d \\ &= |d|(\alpha \wedge \beta) \text{ et puisque } d \in \mathbb{N}^* \text{ alors } \alpha \wedge \beta = 1 \end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ) On suppose que  $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 ; \begin{cases} a = \alpha d \\ b = \beta d \\ \alpha \wedge \beta = 1 \end{cases}$  On a :

$$a \wedge b = \alpha d \wedge \beta d = |d|(\alpha \wedge \beta) = d \text{ car } (|d| = d \text{ et } \alpha \wedge \beta = 1)$$

**Théorème 2 :**

Soient  $a$  et  $b$  et des entiers relatifs non nuls :  $a \wedge b = d \Rightarrow \exists(u, v) \in \mathbb{Z}^2 ; d = au + bv$

**Preuve :**

1- Si  $a|b$  alors  $a \wedge b = |b|$

- si  $b > 0$  alors  $b = 0a + 1b$
- si  $b < 0$  alors  $b = 0a + (-1)b$

2- Si  $b|a$  (même raisonnement)

3- On suppose que  $b \nmid a$  tel que  $0 < b < a$

d'après l'algorithme d'Euclide on a

$$a = bq_0 + r_0 \text{ si } r_0 \neq 0 \text{ alors :}$$

$$b = r_0q_1 + r_1 \text{ si } r_1 \neq 0 \text{ alors :}$$

$$r_0 = r_1q_2 + r_2 \text{ si } r_2 \neq 0 \text{ alors :}$$

.....

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n \text{ si } r_n \neq 0 \text{ alors :}$$

$$r_{n-1} = r_nq_{n+1} + r_{n+1} \text{ si } r_{n+1} = 0 \text{ on arrête le processus .}$$

Et d'après la propriété précédente :  $a \wedge b = b \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2 = \dots = r_{n-1} \wedge r_n = r_n$  car :  $r_n | r_{n-1}$

et  $0 < r_n < r_{n-1} < \dots < r_1 < r_0 < b$

On obtient :

$$r_0 = a - bq_0 = u_0a + v_0b \text{ où } u_0 = 1 \text{ et } v_0 = -q_0$$

$$r_1 = b - r_0q_1 = b - (a - bq_0)q_1 = -aq_1 + b(1 + q_0q_1) = u_1a + v_1b \text{ où } u_1 = -q_1 \text{ et } v_1 = (1 + q_0q_1)$$

On répète le processus et à chaque fois on montre que :  $r_k = au_k + bv_k$  cette opération est valable pour tous les restes  $r_k$  en particulier pour le dernier reste  $r_n$  qui est  $a \wedge b$  donc :  $\exists(u_n, v_n) \in \mathbb{Z}^2 ; a \wedge b = au_n + bv_n$ .

**Remarque**

- Dans l'écriture  $\exists(u, v) \in \mathbb{Z}^2 ; a \wedge b = au + bv$  le couple  $(u, v)$  n'est pas unique.  
 $12 \wedge 9 = 3$  on a  $3 = 1 \times 12 + (-1) \times 9$  et  $3 = (-2) \times 12 + 3 \times 9$
- La réciproque du théorème n'est pas vraie :  
 $2 \times 12 + (-2) \times 9 = 6$  mais  $12 \wedge 9 = 3 \neq 6$

**Théorème (Théorème de Bézout)**

Soient  $a$  et  $b$  et des entiers relatifs non nuls :  $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow \exists(u, v) \in \mathbb{Z}^2 ; 1 = au + bv$

( $\Rightarrow$ ) C'est le théorème précédent.

( $\Leftarrow$ ) On suppose que  $1 = au + bv$

Soit  $d = a \wedge b$  on aura :  $\begin{cases} d|a \\ d|b \end{cases}$  donc  $\begin{cases} d|ua \\ d|vb \end{cases}$  par suite  $d|ua + vb = 1$  donc  $d = 1$  ( $d \in \mathbb{N}^*$ )

et donc  $a \wedge b = 1$

**Exemples :**

- $(5n + 3) \wedge (2n + 1) = 1$  car :  $2 \times (5n + 3) + (-5) \times (2n + 1) = 1$
- $(n + 2) \wedge (n^2 + 2n - 1) = 1$  car  $n \times (n + 2) + (-1) \times (n^2 + 2n - 1) = 1$

**Application :**

① L'utilisation de l'algorithme d'Euclide pour déterminer les coefficients de *Bezout*

Montrons que :  $360 \wedge 84 = 12$  et déterminons  $u$  et  $v$  dans  $\mathbb{Z}$  tels que  $360u + 84v = 12$

on a :  $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$  et  $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$  donc  $360 \wedge 84 = 2^2 \cdot 3 = 12$

D'autre part :

$$360 = 84 \times 4 + \boxed{24} \longrightarrow 24 = \boxed{a - (b \times 4)}$$

$$84 = 24 \times 3 + \boxed{12} \longrightarrow b - \left( \overset{24}{\underbrace{a - (b \times 4)}} \right) \times 3 = 12$$

$$24 = 12 \times 2 + 0$$

$$\text{Donc : } -3a + 13b = 12$$

❶ Considérons dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation (E):  $17x + 36y = 1$  et déterminons une solution particulière de (E).

On a  $17 \wedge 36 = 1$  donc d'après le théorème de Bézout ; il existe  $u$  et  $v$  tels que :  $17u + 36v = 1$  donc (E) admet une solution.

On pose  $a = 36$  et  $b = 17$  on obtient :

$$a = 2b + 2$$

$$b = 8 \times 2 + 1$$

$$\text{Donc : } 2 = a - 2b \text{ et } b = 8 \times (a - 2b) + 1$$

D'où :  $-8a + 17b = 1$  donc le couple  $(-8, 17)$  est une solution de l'équation (E).

## 2) Application du théorème de Bézout :

### Théorème de Gauss

$$\text{Soient } a, b \text{ et } c \text{ des entiers relatifs non nuls : } \begin{cases} c|ab \\ c \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow c|a$$

#### Preuve :

On a :  $c \wedge a = 1$  d'après le théorème de Bézout :  $(\exists(u, v) \in \mathbb{Z}^2)(au + vc = 1)$  d'où  $bau + bvc = b$

Et puis que  $c|ab$  alors  $ab = kc$  (où  $k \in \mathbb{Z}$ ) donc  $kcu + bvc = b$  d'où  $c(ku + bv) = b$  et  $ku + bv \in \mathbb{Z}$  donc  $c|b$ .

#### Remarque :

La condition  $c \wedge b = 1$  dans le théorème de Gauss est indispensable ;  $6|4 \times 3$  mais  $6 \nmid 3$  et  $6 \nmid 4$

### Théorème

$$\text{Soient } a, b \text{ et } c \text{ des entiers relatifs non nuls : } \begin{cases} a|c \text{ et } b|c \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow ab|c$$

#### Preuve :

On a :  $a|c$  et  $b|c$  donc ils existent  $k$  et  $h$  tels que :  $c = ka = hb$  et puisque  $a \wedge b = 1$  alors :

$$(\exists(u, v) \in \mathbb{Z}^2)(au + vb = 1)$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : (on multiplie par } c) \quad c &= cau + cvb \\ &= hbau + kavb \\ &= ab(hu + kv) \text{ et par suite } ab|c \end{aligned}$$

#### Remarque :

La condition  $c \wedge b = 1$  dans le théorème précédent est indispensable ;  $6|12$  et  $3|12$  mais  $6 \times 3 = 18 \nmid 12$ .

### Propriétés :

Soient  $a, b$  et  $c$  des entiers relatifs non nuls :

$$\text{❶ } \begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a \wedge bc = 1 \quad \text{❷ } a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a \wedge b^n = 1 \quad \text{❸ } a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a^n \wedge b^m = 1 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

#### Preuve :

❶

$$(\Rightarrow) \text{ On suppose que } \begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{cases} \text{ donc : } \begin{cases} (\exists(u, v) \in \mathbb{Z}^2)(au + vb = 1) \\ (\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2)(a\alpha + \beta c = 1) \end{cases}$$

Par le produit on obtient :  $(au + vb)(a\alpha + \beta c) = 1$  ; d'où après développement on obtient :

$$a^2u\alpha + au\beta c + vb\alpha a + vb\beta c = 1 \text{ et donc } (au\alpha + u\beta c + vb\alpha)a + (v\beta)bc = 1 \text{ donc et d'après Bézout } a \wedge bc = 1$$

$$(\Leftarrow) \text{ On suppose que } a \wedge bc = 1 \text{ donc } (\exists(u, v) \in \mathbb{Z}^2)(au + vbc = 1)$$

$$\text{D'où } au + (vb)c = 1 \text{ donc } a \wedge c = 1 \text{ et } au + (vc)b = 1 \text{ donc } a \wedge b = 1$$

②

( $\Rightarrow$ ) On suppose que  $a \wedge b = 1$  et on montre par récurrence que :  $a \wedge b^n = 1$

- Pour  $n = 1$  la propriété est vraie.
- On suppose que la propriété est vraie pour  $n$
- On montre qu'elle est vraie pour  $n + 1$

On a :  $\begin{cases} a \wedge b^n = 1 \\ a \wedge b = 1 \end{cases}$  donc et d'après ① on a :  $a \wedge bb^n = 1$  d'où  $a \wedge b^{n+1} = 1$

Donc si  $a \wedge b = 1$  alors  $a \wedge b^n = 1$  pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ .

( $\Leftarrow$ )

On suppose que  $a \wedge b^n = 1$  donc et d'après le théorème de Bézout  $(\exists(u, v) \in \mathbb{Z}^2)(au + vb^n = 1)$

Donc :  $au + (vb^{n-1})b = 1$  donc  $(\exists(u', v') \in \mathbb{Z}^2)(au' + v'b = 1)$  et par suite  $a \wedge b = 1$

③ Est un résultat immédiat de ②.

### 3) L'équation $ax + by = c$

**Théorème :** (fondamental)

L'équation (E) :  $ax + by = c$  admet une solution si et seulement si  $(a \wedge b) | c$

**Preuve :**

- On suppose que  $d = (a \wedge b) | c$  alors :  $(\exists k \in \mathbb{Z})(c = kd)$  et on a :  $(\exists(u, v) \in \mathbb{Z}^2)(au + vb = d)$

$$kd = k(a \wedge b) = (ku)a + (kv)b$$

C'est-à-dire :  $c = (ku)a + (kv)b$  donc l'équation (E) admet  $(x_0, y_0)$  comme solution où  $\begin{cases} x_0 = ku \\ y_0 = kv \end{cases}$

- Inversement : On suppose que :  $ax + by = c$  admet une solution  $(x_0, y_0)$ , donc :

$$ax_0 + by_0 = c \text{ puisque : } \begin{cases} (a \wedge b) | a \\ (a \wedge b) | b \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} (a \wedge b) | x_0 a \\ (a \wedge b) | y_0 b \end{cases} \text{ donc } (a \wedge b) | (ax_0 + by_0) = c \text{ donc : } (a \wedge b) | c.$$

**Théorème :**

Si le couple  $(x_0, y_0)$  est une solution de l'équation (E) :  $ax + by = c$  alors, l'ensemble des solutions de (E) est :  $S = \left\{ \left( x_0 + \frac{kb}{a \wedge b}, y_0 - \frac{ka}{a \wedge b} \right) / k \in \mathbb{Z} \right\}$

**Démonstration :**

On pose :  $A = \left\{ \left( x_0 + \frac{kb}{a \wedge b}, y_0 - \frac{ka}{a \wedge b} \right) / k \in \mathbb{Z} \right\}$  et on montre que  $\begin{cases} A \subset S \\ S \subset A \end{cases}$

- Montrons que  $A \subset S$  : il suffit de montrer que le couple  $\left( x_0 + \frac{kb}{a \wedge b}, y_0 - \frac{ka}{a \wedge b} \right)$  est solution de l'équation (E) :

$$\begin{aligned} \text{On a : } a \left( x_0 + \frac{kb}{a \wedge b} \right) + b \left( y_0 - \frac{ka}{a \wedge b} \right) &= ax_0 + \frac{akb}{a \wedge b} + by_0 - \frac{bka}{a \wedge b} \\ &= ax_0 + by_0 = c \end{aligned}$$

Donc le couple  $\left( x_0 + \frac{kb}{a \wedge b}, y_0 - \frac{ka}{a \wedge b} \right)$  (pour  $k \in \mathbb{Z}$ ) est solution : d'où :  $A \subset S$ .

- Inversement : On suppose que le couple  $(x, y) \in S$

Donc  $(x, y)$  es solution de l'équation (E) d'où  $ax + by = c$  ; or :  $(x_0, y_0)$  est une solution de l'équation (E) , donc :  $ax_0 + by_0 = c$  donc (différence membre à membre)  $a(x - x_0) = -b(y - y_0)$

$$\text{Soit } d = a \wedge b \text{ on a : } (\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2) \begin{cases} a = \alpha d & \text{et } b = \beta d \\ \alpha \wedge \beta = 1 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} (x, y) \in S &\Leftrightarrow a(x - x_0) = -b(y - y_0) \\ &\Leftrightarrow \alpha d(x - x_0) = -\beta d(y - y_0) \\ &\Leftrightarrow \alpha(x - x_0) = -\beta(y - y_0) \quad (*) \quad (d \neq 0) \end{aligned}$$

On conclut que :  $\beta | \alpha(x - x_0)$  et puisque :  $\alpha \wedge \beta = 1$  alors (d'après T. Gauss)  $\beta | (x - x_0)$

Donc  $(\exists k \in \mathbb{Z})(x - x_0) = k\beta$  et par suite :  $(*) \alpha k\beta = -\beta(y - y_0)$  d'où :  $y - y_0 = -k\alpha$

Par suite :  $(x, y) \in S \Leftrightarrow \begin{cases} (y - y_0) = -k\alpha \\ (x - x_0) = k\beta \end{cases}$  où  $k \in \mathbb{Z}$  en remplaçant  $\begin{cases} \alpha & \text{par } \frac{a}{d} \\ \beta & \text{par } \frac{b}{d} \end{cases}$  on obtient :

$$(x, y) \in S \Leftrightarrow x = x_0 + \frac{kb}{d} \text{ et } y = y_0 - \frac{ka}{d} \text{ C.Q.F.D.}$$

**Exemple :**

Considérons l'équation (E):  $756x - 245y = 14$

- 1- Montrer l'équation (E) admet une solution.
- 2- Déterminer une solution particulière de (E)
- 3- Résoudre l'équation (E)

**Solution :**

$$756 = 2^2 \times 3^3 \times 7 \text{ et } 245 = 5 \times 7^2$$

1- On a :  $756 \wedge 245 = 7$  et  $7|14$  donc l'équation (E) admet une solution dans  $\mathbb{Z}^2$ .

2- En utilisant l'algorithme d'Euclide on obtient  $a = 756$  et  $b = 245$

$$a = 3 \times b + 21$$

$$b = 11 \times 21 + 14$$

$$21 = 14 + 7$$

On a donc :

$$21 = a - 3b$$

$$b = 11 \times (a - 3b) + 14 \Leftrightarrow 14 = 34b - 11a$$

$$7 = (a - 3b) - (34b - 11a) \Leftrightarrow 7 = 12a - 37b$$

Finalement :

$14 = 24a - 74b$  et donc le couple  $(24, 74)$  est une solution particulière de (E) d'où

$$S = \left\{ \left( 24 - \frac{k \times 245}{7}, 74 - \frac{k \times 756}{7} \right) / k \in \mathbb{Z} \right\} = \{(24 - 35k, 74 - 108k) / k \in \mathbb{Z}\} = \{(24 + 35k, 74 + 108k) / k \in \mathbb{Z}\}$$

**4) La congruence modulo  $n$ , complément.****Théorème :**

Soient  $a, b$  et  $c$  des entiers relatifs non nuls. et  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $d = n \wedge c$  on a :  $ac \equiv bc [n] \Leftrightarrow a \equiv b \left[ \frac{n}{d} \right]$

**Preuve :**

( $\Rightarrow$ )

On suppose :  $ac \equiv bc [n]$ , donc  $n|(ac - bc) = c(a - b)$  donc  $\frac{n}{d} | \frac{c}{d}(a - b)$  et comme  $\frac{n}{d} \wedge \frac{c}{d} = 1$

Alors : (D'après théorème de Gauss)

$$\frac{n}{d} | (a - b) \text{ donc : } a \equiv b \left[ \frac{n}{d} \right]$$

( $\Leftarrow$ )

On suppose que :  $a \equiv b \left[ \frac{n}{d} \right]$  donc  $a = b + k \frac{n}{d}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) donc  $da = db + kn$  ( $d = n \wedge c \Rightarrow c = \alpha d$ )

Donc :  $ada = \alpha db + akn$  d'où  $ca = cb + hn$  donc  $ac \equiv bc [n]$ .

**Propriété :**

①  $\begin{cases} ac \equiv bc [n] \\ c \wedge n = 1 \end{cases} \Rightarrow a \equiv b [n]$     ②  $\begin{cases} a \equiv b [n] \\ m|n \end{cases} \Rightarrow a \equiv b [m]$     ③  $\begin{cases} ac \equiv bc [p] \\ p \text{ premier et } p \nmid c \end{cases} \Rightarrow a \equiv b [m]$

**Preuve :**

Ce sont des résultats immédiats du théorème précédent.

**5) Le P.G.D.C et le P.P.M.C de plusieurs nombres.****Définition :**

Soient  $a_1, a_2, \dots, a_n$  des entiers relatifs non nuls, le plus grand entier naturel  $d$  qui divise en même temps tous les nombres  $a_1, a_2, \dots, a_n$  s'appelle le plus grand diviseur commun des nombres  $a_1, a_2, \dots, a_n$  et se note :

$$d = a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$$

**Théorème :**

Soient  $a_1, a_2, \dots, a_n$  des entiers relatifs non nuls ; on a :

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n = (a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_{n-2}) \wedge (a_{n-1} \wedge a_n)$$

**Exemple :**

$$756 \wedge 350 \wedge 616 = 756 \wedge (350 \wedge 616) = 756 \wedge 14 = 14$$

**Théorème (Généralisation de Bézout)**

$$\text{Si } d = a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n \text{ alors } \exists (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ telle que : } d = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$$

**Preuve :** par récurrence**Définition :**

$$\text{On dit que les entiers relatifs non nuls } a_1, a_2, \dots, a_n \text{ sont premiers entre eux si } a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n = 1$$

**Remarque :**

Les entiers relatifs non nuls  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sont premiers entre eux ne veut pas dire que les entiers  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sont premiers entre eux deux à deux.

**Exemple :**

3, 5 et 6 sont premiers entre eux.

**Théorème (Généralisation de Bézout)**

$$\text{Si } a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n = 1 \text{ si et seulement si } \exists (u_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ telle que : } 1 = \sum_{i=1}^n u_i a_i$$

**Définition :**

Soient  $a_1, a_2, \dots, a_n$  des entiers relatifs non nuls, le plus petit entier naturel  $m$  qui est multiple en même temps tous les nombres  $a_1, a_2, \dots, a_n$  s'appelle le plus grand diviseur commun des nombres  $a_1, a_2, \dots, a_n$  et se note :  
 $d = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$

**6) Propriétés des nombres premiers.****Théorème :**

- ① Si  $p$  et  $q$  sont des nombres premiers positifs alors ils sont premier entre eux.
- ② Si  $p$  est premier alors il est premier avec tout nombre entier non nul  $a$  tel que  $p \nmid a$

**Preuve :** En exercice.**Remarque :**

La réciproque de ① n'est pas vraie ; 14 et 9 sont premiers entre eux mais aucun d'eux n'est premiers.

**Propriétés :**

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \left\{ \begin{array}{l} p \text{ premier} \\ p|ab \Rightarrow p|b \\ p \nmid a \end{array} \right. \quad \textcircled{2} \left\{ \begin{array}{l} p \text{ premier} \\ p|ab \Rightarrow p|a \text{ ou } p|b \end{array} \right. \quad \textcircled{3} \left\{ \begin{array}{l} p \text{ premier} \\ p|a_1 a_2 \dots a_n \Rightarrow \exists i \in \{1, 2, \dots, n\} p|a_i \end{array} \right. \\ \\ \textcircled{4} \left\{ \begin{array}{l} \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}; p_i \text{ premier} \\ p \text{ premier} \\ p|p_1 p_2 \dots p_n \end{array} \right. \Rightarrow \exists i \in \{1, 2, \dots, n\} p = p_i \end{array}$$

**Preuve :** Résultat du théorème de Gauss.**7) Le petit théorème de Fermat.****Théorème :**

Si  $p$  est un nombre premier et  $a$  un entier relatif non nul et pas divisible par  $p$  alors :  $a^{p-1} - 1$  est divisible par  $p$  c'est-à-dire  $a^{p-1} \equiv 1 [p]$  ou encore :  $a^p \equiv a [p]$

**Preuve :**

Soient  $p$  un nombre premier et  $k$  un entier naturel tel que  $1 \leq k \leq p - 1$

On a  $p$  premier et  $p > k$  donc  $p \nmid k$  et par suite  $p \wedge k = 1$  d'autre part :

$$kC_p^k = k \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p \times (p-1)!}{(k-1)!(p-k)!} = pC_{p-1}^{k-1}$$

Donc  $p | kC_p^k$  et comme  $p \wedge k = 1$  alors d'après T. Gauss  $p | C_p^k$

Montrons que  $p | (a+1)^p - a^p - 1$

On a d'après la formule de binôme On a :  $(a+1)^p = a^p + C_p^1 a^{p-1} + C_p^2 a^{p-2} + \dots + C_p^{p-1} a + 1$

Donc  $(a+1)^p - a^p - 1 = C_p^1 a^{p-1} + C_p^2 a^{p-2} + \dots + C_p^{p-1} a$

Et comme  $p | C_p^k$  pour  $1 \leq k \leq p - 1$  alors  $p | (a+1)^p - a^p - 1$

On a donc :  $(a+1)^p - 1 \equiv a^p \pmod{p}$ .

Montrons par récurrence sur  $a$  (On prend pour le moment  $a \in \mathbb{N}$ ) que  $a^p \equiv a \pmod{p}$

- Pour  $a = 0$  la propriété est vraie car  $0^p = 0 \equiv 0 \pmod{p}$
- On suppose que la propriété est vraie pour  $a$  c'est-à-dire  $a^p \equiv a \pmod{p}$
- Montrons que la propriété est vraie pour  $(a+1)$  c'est-à-dire  $(a+1)^p \equiv a+1 \pmod{p}$   
On a : d'après les questions précédente  $(a+1)^p \equiv a^p + 1 \pmod{p}$ .  
Or d'après H.R  $a^p \equiv a \pmod{p}$  donc :  $(a+1)^p \equiv a+1 \pmod{p}$ .  
Donc  $(\forall a \in \mathbb{N})(\forall p \in \mathbb{P})(a^p \equiv a \pmod{p})$

Si  $a < 0$  alors  $-a > 0$

- Si  $p = 2$  on aura  $a^2 = (-a)^2 \equiv (-a) \pmod{2}$  et  $-a \equiv a \pmod{2}$  car  $2 | (a - (-a)) = 2a$
- si  $p \geq 3$  alors  $p$  est impaire et  $(-a)^p = -a^p$  et  $(-a)^p \equiv (-a) \pmod{p}$  on en déduit que  $-a^p \equiv -a \pmod{p}$  et finalement  $a^p \equiv a \pmod{p}$

D'où le théorème.

**Exemple :**

Montrons que :  $(\forall n \geq 2) n^5 \equiv n \pmod{30}$

On a : d'après le petit théorème de Fermat :  $n^5 \equiv n \pmod{5}$

Donc  $5 | n^5 - n$

D'autre part :  $n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n-1)(n+1)(n^2 + 1)$

Donc  $2 | n(n-1)$  et  $3 | (n-1)n(n+1)$  et puisque 2 et 3 sont premiers alors  $6 = (2 \times 3) | n^5 - n$

Finalement :

$$\begin{cases} 6 | n^5 - n \text{ et } 5 | n^5 - n \\ 6 \wedge 5 = 1 \end{cases} \Rightarrow (30 | n^5 - n)$$

**Exercices**

- ❶ Soient  $p$  et  $q$  deux nombres premiers distincts ; montrer que  $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$
- ❷ Considérons dans  $\mathbb{Z}$  l'équation (E) :  $x^4 + 781 = 3y^4$  et soit  $S$  son ensemble de solution :
  - 1- Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{Z})(x^4 \equiv 1 \pmod{5} \text{ ou } x^4 \equiv 0 \pmod{5})$
  - 2- Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{Z})(x^4 + 781 \equiv 2 \pmod{5} \text{ ou } x^4 + 781 \equiv 1 \pmod{5})$
  - 3- Déterminer l'ensemble  $S$ .

**Remarque :**

La réciproque du théorème de Fermat n'est pas vraie :  $7^{25} \equiv 1 \pmod{24}$  mais 25 n'est pas premier.

### III) SYSTEMES DE NUMERATION

#### 1) Théorème et définition

##### Théorème :

Soit  $b$  un entier naturel tel que :  $b > 1$

Chaque entier naturel non nul  $n$  s'écrit d'une façon unique de la forme :

$$n = a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + \dots + a_1 b + a_0$$

Où : les  $(a_i)_{1 \leq i \leq m}$  sont des entiers naturel  $0 \leq a_i \leq b - 1$  et  $a_m \neq 0$

##### Preuve :

En utilisant la division Euclidienne de  $n$  sur  $b$  on obtient :  $n = q_1 b + a_0$  où  $0 \leq a_0 < b$

- Si  $q_1 \leq b - 1$  on s'arrête et  $a_1 = q_1$
- si  $q_1 \geq b$ , On effectue une autre division Euclidienne de  $q_1$  sur  $b$  on obtient :  $q_1 = q_2 b + a_1$  et par suite  $n = (q_2 b + a_1) b + a_0 = q_2 b^2 + a_1 b + a_0$ .
  - Si  $q_2 \leq b - 1$  on s'arrête et  $a_2 = q_2$
  - Si non on continue le processus

##### Notation :

Si  $n = a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + \dots + a_1 b + a_0$  on écrit :  $n = \overline{a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0}_{(b)}$  cette écriture s'appelle l'écriture de l'entier  $n$  dans la base  $b$

##### Exemple :

Le nombre  $n = 2987$  s'écrit  $n = \overline{2987}_{(10)}$  car  $n = 2 \times 10^4 + 9 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 7$

Essayons d'écrire  $n$  dans la base 6 :

On a :

$$2987 = 6 \times 497 + 5$$

$$497 = 6 \times 82 + 5$$

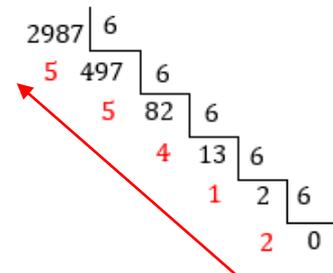
$$82 = 6 \times 13 + 4$$

$$13 = 6 \times 2 + 1$$

$$2 = 6 \times 0 + 2$$

$$\text{Donc } 2987 = 2 \times 6^4 + 1 \times 6^3 + 4 \times 6^2 + 5 \times 6 + 5 = \overline{21455}_{(6)}$$

Cette succession de divisions Euclidiennes se représente comme ci-contre :



#### 2) Les opérations dans une base de numération

##### 2.1 La somme :

On peut effectuer la somme dans une base donnée  $b$  par deux façons différentes :

- La décomposition :

$$\begin{aligned} \overline{2534}_{(7)} + \overline{631}_{(7)} &= (2 \times 7^3 + 5 \times 7^2 + 3 \times 7 + 4) + (6 \times 7^2 + 3 \times 7 + 1) \\ &= 2 \times 7^3 + (5 + 6) \times 7^2 + (3 + 3) \times 7 + (4 + 1) \\ &= 3 \times 7^3 + 4 \times 7^2 + 6 \times 7 + 5 \\ &= \overline{3465}_{(7)} \end{aligned}$$

$$5 + 6 = 7 + 4$$

- Calcul direct avec le retenu

$$\begin{array}{r} 1 \\ \overline{2534}_{(7)} \\ + \overline{631}_{(7)} \\ \hline = \overline{3465}_{(7)} \end{array}$$

### 2.2 Le produit :

Il est préférable d'effectuer le produit en utilisant **le calcul direct avec le retenu** car la décomposition risque d'être longue :

$$\begin{array}{r}
 \phantom{0}14 \\
 \phantom{0}25 \\
 \times 327_{(8)} \\
 \hline
 \phantom{0}56_{(8)} \\
 \hline
 \phantom{0}2412 \\
 + \phantom{0}2063 \\
 \hline
 = 23242_{(8)}
 \end{array}$$

Pour vérifier :

$$\begin{aligned}
 327_{(8)} \times 56_{(8)} &= (3 \times 8^2 + 2 \times 8 + 7) \times (5 \times 8 + 6) \\
 &= 9890 \\
 &= 23242_{(8)}
 \end{aligned}$$

### 2.3 Opérations dans différentes bases :

Pour effectuer des opérations dans différentes base on développe les deux nombres dans la base 10 ; on effectue l'opération et on écrit le résultat dans la base demandée.

**Exemple :** effectuer dans la base 9

$$\begin{aligned}
 6432_{(7)} \times 54_{(8)} &= (6 \times 7^3 + 4 \times 7^2 + 3 \times 7 + 2) \times (5 \times 8 + 4) \\
 &= 100188 \\
 &= 1 \times 9^5 + 6 \times 9^4 + 2 \times 9^3 + 3 \times 9^2 + 8 \times 9 + 0 \\
 &= 162380_{(9)}
 \end{aligned}$$

## IV) CRITERES DE DIVISIBILITE DES NOMBRES 5,25,3,9,11 ET 4

**Théorème :**

Soit  $x$  un entier naturel non nul tel que :  $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$  où  $0 \leq a_i \leq 9$  ; on a :

- $x \equiv 0 [5] \Leftrightarrow a_0 = 0$  ou  $a_0 = 5$
- $x \equiv 0 [25] \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \in \{0,25,50,75\}$
- $x \equiv 0 [3] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n a_i \equiv 0 [3]$
- $x \equiv 0 [9] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n a_i \equiv 0 [9]$
- $x \equiv 0 [11] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n (-1)^i a_i \equiv 0 [11]$
- $x \equiv 0 [4] \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \equiv 0 [4]$

**Preuve en exercice :**

## V) L'ENSEMBLE $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ OU $p$ EST UN NOMBRE PREMIER.

**Théorème :**

Pour tous entiers relatifs non nuls  $a$  et  $b$  ;  $a \wedge n = 1 \Leftrightarrow (\exists m \in \mathbb{Z})(am = 1 [n])$

**Preuve :**

( $\Rightarrow$ ) On suppose que :  $a \wedge n = 1$ , alors d'après T. Bézout  $(\exists (m, u) \in \mathbb{Z}^2)(ma + un = 1)$

Donc :  $(\exists (m, u) \in \mathbb{Z}^2)(un = 1 - ma)$  donc  $n | ma - 1$  et finalement :  $am = 1 [n]$

( $\Leftarrow$ ) On suppose que :  $(\exists m \in \mathbb{Z})(am = 1 [n])$  donc  $n | (am - 1)$  donc  $(\exists k \in \mathbb{Z})(am - 1 = kn)$

donc :  $am - kn = 1$  et d'après T. Bézout inverse  $a \wedge n = 1$

**Théorème :**

Si  $p$  est un nombre premier positif alors tout élément  $\bar{x} \neq \bar{0}$  admet un inverse dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} - \{\bar{0}\}$

**Preuve :**

Soit  $p$  un nombre premier positif ; on pose  $E = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} - \{\bar{0}\}$

$\bar{x} \in E \Leftrightarrow (\exists \alpha \in \{1, 2, \dots, p-1\})(\bar{x} = \bar{\alpha})$

$p$  étant, premier donc  $p$  ne divise aucun nombre de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, p-1\}$  d'où  $p \nmid \alpha = 1$

Et d'après la propriété précédente :  $(\exists y \in \mathbb{Z}^*)(y\alpha \equiv 1[p])$

Donc :  $\bar{\alpha}\bar{y} = \bar{1}$

D'où :  $\bar{\alpha}\bar{y} = \bar{1}$  et comme  $\bar{x} = \bar{\alpha}$  donc  $\bar{x}\bar{y} = \bar{1}$